

**ШАРТҲОИ КАНОРӢ БАРОИ МУОДИЛАИ ИНТЕГРАЛИИ ЯКЧЕНАКАИ МОДЕЛӢ****С.Б. Зарипов**

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ, ш. Душанбе, Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар таҳқиқоти мазкур омӯзиши муодилаи интегралӣ якченакаи моделӣ мавриди баррасӣ қарор гирифтааст, ки дар он нуктаи сарҳадии чап ба соҳаи интегралгирӣ дохил мешавад. Муодилаи мавриди назар ду нуктаи канорӣ дошта, омӯзиши он дар заминаи назарияи муодилаҳои интегралӣ дифференсиалӣ сурат гирифтааст. Барои исботи мавҷудият ва наздиқшавии тасвирҳои интегралӣ истифодаи шартҳои асимптотикӣ зарур шуморида шуд. Бояд зикр кард, ки ҳалли умумии ин муодилаи моделӣ дорои функсияи ихтиёрий мебошад. Дар ҳолате, ки ҳалли умумӣ аз собитҳои (константаҳои) ихтиёрий иборат аст, масъалаи канорӣ гузошта ва таҳқиқ шудааст. Илова бар ин, ҳолатҳое омӯхта шудаанд, ки дар онҳо муодилаи додашуда танҳо ҳалли ягона дорад. Қайд кардан ба маврид аст, ки муодилаи интегралӣ дар ҳолате, ки ҳалли ягона дорад гузориши шартҳои канорӣ лозим нест, чунки ҳалли муодилаи додашуда доимӣҳои ихтиёрийро дар бар намегирад. Дар ҳолате, ки ҳалли муодила доимӣҳои ихтиёрийро дар бар мегирад, вобаста ба доимӣҳои ихтиёрий шартҳои канорӣ гузошта мешаванд. Дар интиҳо, дар асоси дастовардҳои илмӣ бадастомада, теоремаҳо ва ҳулосаҳои дахлдор пешниҳод гардидаанд.

**Калидвожаҳо:** муодилаи якченакаи моделӣ, нуқтаҳои дохилӣ ва сарҳадӣ, масъалаҳои канорӣ, рафторҳои асимптотикӣ, доимӣҳои додашуда.

**ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ОДНОМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ****С.Б. Зарипов**

Таджикский технический университет имени академика М.С. Осими, г. Душанбе, Республика Таджикистан

В данном исследовании рассматривается модельное интегральное уравнение в одномерном случае. Рассматриваемое уравнение имеет две крайние точки, и его изучение проведено в контексте теории интегрально-дифференциальных уравнений. Для доказательства существования и сходимости интегральных представлений было сочтено необходимым использование асимптотических условий. Следует отметить, что общее решение данного модельного уравнения содержит произвольную функцию. В случае, когда общее решение состоит из произвольных констант, была поставлена и исследована крайняя задача. В работе используются общие методы теории интегральных и дифференциальных уравнений, метод решения интегрального уравнения Вольтерра и получения интегральных представлений. Кроме того, изучены условия, при которых данное уравнение имеет единственное решение. Стоит отметить, что если интегральное уравнение имеет единственное решение, то задание граничных условий не требуется, поскольку решение не содержит произвольных постоянных. На основе полученных интегральных представлений ставятся и исследуются различные крайние задачи. В тех случаях, когда решение включает произвольные постоянные, граничные условия накладываются с их учетом. В завершение, на основе полученных научных результатов, представлены соответствующие теоремы и выводы.

**Ключевые слова:** одномерное модельное уравнение, внутренние и граничные точки, крайние задачи, асимптотические поведения, заданные постоянные.

**BOUNDARY PROBLEMS FOR A MODEL ONE-DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATION****S.B. Zaripov**

Tajik technical university named after academician M.S. Osimi, Dushanbe, Republic of Tajikistan

This research examines a model integral equation in the one-dimensional case. The equation under consideration possesses two boundary points, and its study was conducted within the framework of the theory of integro-differential equations. To prove the existence and convergence of integral representations, the application of asymptotic conditions was deemed necessary. It should be noted that the general solution of this model equation contains an arbitrary function. In cases where the general solution consists of arbitrary constants, a boundary value problem was formulated and investigated. Furthermore, the conditions under which the given equation possesses a unique solution were studied. It is worth noting that if the integral equation has a unique solution, it is not required to set the boundary conditions, because the solution does not contain arbitrary constants. In those cases when the solution includes arbitrary constants, the boundary conditions are applied accordingly. Finally, based on the obtained scientific results, relevant theorems and conclusions are presented.

**Keywords:** one-dimensional model integral, internal and boundary points, boundary problems, asymptotic conditions, given constants.

**Муқаддима (Introduction)**

Яке аз мушкилоти калидии математикаи имрӯза, ки дорои аҳамияти амалии фаровон аст, таҳлили муодилаҳои интегралӣ якченака ва дученакаи намуди Волтерра мебошад. Аз назарияи муодилаҳои ҷинси дуюми Волтерра бармеояд, ки дар сурати бефосила будани ядро ва ё дар фазои Гилберт қарор доштани он, муодила ҳалли ягона пайдо мекунад. Дар ин пажӯҳиш шароитҳое муайян карда шудаанд, ки ягонагии ҳалли ин гуна муодилаҳоро таъмин менамоянд. Агар тасвири ҳалҳо, функсияҳо ё доимӣҳои ихтиёрийро дар бар гиранд, зарур аст, ки бо истифода аз тасвирҳои интегралӣ ва хусусиятҳои онҳо масъалаҳои канорӣ ба таври корректӣ (дуруст) тарҳрезӣ карда шаванд.

Мақсади мақола ин гузориш ва тадқиқи масъалаи канорӣ барои муодилаи интегралӣ якченакаи моделии намуди Волтерра бахшида шудааст.

### Мавод ва усулҳои таҳқиқот (*Materials and methods*)

Ҳангоми омӯзиши ингуна масъалаҳои канорӣ усулҳои умумии назарияи муодилаҳои дифференциалӣ ва интегралӣ истифода мешаванд. Инчунин методи ҳалли муодилаи интегралӣ Волтерра бо нуқтаи сингулярии қайдшудаи чап ва рост истифода мешаванд. Дар ҳолатҳое, ки тасвирҳои ҳалҳои муодилаҳои интегралӣ якченакаи ёфташудаи чунин намуди муодилаҳои интегралӣ доимӣҳои ихтиёрӣ ва функсияҳои ихтиёриро дарбар мегиранд, аз тасвирҳои интегралӣ ҳосилшуда ва хосиятҳои он истифода бурда, ба таври амиқ гузоштани масъалаҳои канорӣ тадқиқ карда шудаанд.

Пеш аз ҳама қайд кардан ба маврид аст, ки барои гузориш ва тадқиқи масъалаҳои канорӣ вобаста ба муодилаи интегралӣ якченакаи моделӣ, аввалан ба тадқиқ ва омӯзиши муодилаи якченакаи моделӣ мепардозем.

Бо ёрии  $\Gamma = \{x; a < x < b\}$ , маҷмуи нуқтаҳоро ишорат мекунем. Дар маҷмуи  $\Gamma$  муодилаи интегралӣ моделии намуди зеринро дида мебароем:

$$\eta(x) + \int_a^x \frac{\Lambda(x, t)}{(t-a)(b-t)} \eta(t) dt = \varpi(x) \quad a < x < b, \quad (1)$$

дар баробарии (1),  $\varpi(x)$  – функсияи додашуда дар  $\bar{\Gamma}$ ,  $\eta(x)$  – функсияи номаълум,  $\Lambda(x, t)$  – функсияи додашуда дар соҳаи  $D = \{(x, t); a < x < b, a < t < b\}$  мебошад, ғайр аз ин  $\Lambda(a, a) \neq 0$ .

Ҳалли муодилаи моделии (1) – ро дар синфи функсияҳои бефосила дар порчаи маҳдуди  $\bar{\Gamma}$  ҷустуҷӯ мекунем, ки дар ҳоли  $x = a$  будан, ба нол майл мекунад, бо шарт асимптотикии зерин:

$$\eta(x) = O[(x-a)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0, \quad x \rightarrow a. \quad (1.1)$$

Чи тавре, ки маълум аст, ҳангоми  $x = b$  будан, ҳалли муодила ғайри маҳдуд мешавад ё ба нол майл мекунад.

### Натиҷаҳо (*Results*)

Ҳолати  $A(a) < 0$

Ба ҳамин тариқ, ҳалли муодилаи моделии (1) – ро ҳангоми  $\Lambda(x, t) = A(t)$  будан, дида мебароем:

$$\eta(x) + \int_a^x \frac{A(t)}{(t-a)(b-t)} \eta(t) dt = \varpi(x), \quad a < x < b \quad (2)$$

ки дар ин ҷо  $A(x)$ ,  $\varpi(x)$  – функсияҳои додашуда, ба ғайр аз ин  $A(a) \neq 0$ .

Ҳалли муодилаи моделии интегралӣ (2) – ро дар синфи функсияҳое меҷӯем, ки  $\eta(x) \in C(\Gamma)$  ( $a \leq x \leq b$ ), ҳангоми  $x = a$  ба нол майл кунад, бо шарт асимптотикии (1.1) ва дар нуқтаи  $x = b$  ғайри маҳдуд мешавад ё ба нол майл мекунад.

Масъалаи тадқиқ ва омӯзиши муодилаи интегралӣ моделии намуди (2), бо ду нуқтаи сарҳадии сингулярӣ ва суперсингулярӣ дар қорҳои [1], [10] мавриди омӯзиш қарор дода шудааст.

Фарз мекунем, ки дар муодилаи моделии интегралӣ (2)  $\varpi(x) \in C(\bar{\Gamma})$ , ҳалли муодилаи (2) мавҷуд аст ва он дорои ҳосилаҳои бефосилаи тартиби як мебошад, ҳарду тарафи баробарии (2) – ро дифференсиронида, баъдан ба ифодаи  $(x-a) \cdot (b-x)$  зарб мезанем, сипас мегузарем ба ҳалли муодилаи дифференсиалӣ одии тартиби яки таназулёбандаи намуди зерин:

$$D_{a,b}^x \eta(x) + A(x) \eta(x) - D_{a,b}^x \varpi(x) = 0, \quad (3)$$

дар ин ҷо 
$$D_{a,b}^x = (x-a)(b-x) \frac{d}{dx}.$$

Инак, ҳалли муодилаи (3) – ро дида мебароем:

$$(b-x) \cdot \frac{d\eta}{dx} + \frac{A(x)\eta(x)}{(x-a)} = 0,$$

ё ин ки

$$\frac{d\eta}{dx} + \frac{A(x)}{(b-x)(x-a)} \eta(x) = 0. \quad (4)$$

Баробарии охиронро дар намуди зерин наиштан мумкин аст:

$$\frac{d\eta}{dx} + \frac{A(x) - A(a)}{(x-a)(b-x)} \eta(x) = -\frac{A(a)}{(x-a)(b-x)} \eta(x) 0.$$

Ифодаи охирон ҳосилшударо бо ҳудуди аз  $a + \varepsilon$  то  $x$ , интегронида, баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\ln \eta(x) - \ln(\eta(a + \varepsilon)) + \int_{a+\varepsilon}^x \frac{A(t) - A(a)}{(t-a)(b-t)} dt + \frac{A(a)}{(b-a)} \ln \left( \frac{x-a}{b-x} \right) - \frac{A(a)}{(b-a)} \ln \left( \frac{\varepsilon}{b-a-\varepsilon} \right) = \ln \phi. \quad (5)$$

Бинобар ихтиёри будани  $\eta(a + \varepsilon)$ , онро чунон интиҳоб мекунем, ки баробарии зерин чой дошта бошад:

$$-\ln(\eta(a + \varepsilon)) - \frac{A(a)}{(b-a)} \ln \left( \frac{\varepsilon}{b-a-\varepsilon} \right) = 0.$$

Баробарии охиронро потенсиронида ҳосил мекунем:

$$\eta(a + \varepsilon) = \left( \frac{b-a-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}}. \quad (6)$$

Ҳангоми иҷро шудани шarti (6), баробарии (5) намуди зеринро мегирад:

$$\ln \eta(x) + \int_{a+\varepsilon}^x \frac{A(t)-A(a)}{(t-a)(b-t)} dt + \frac{A(a)}{(b-a)} \ln \left( \frac{x-a}{b-x} \right) = \ln \phi.$$

Ҳангоми  $\varepsilon \rightarrow 0$  ба ҳудуд гузашта, баъд аз табдилдиҳии элементарӣ баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\eta(x) = \frac{\phi}{e^{W_A(x) \left( \frac{x-a}{b-x} \right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}}}},$$

дар ин ҷо

$$\eta(x) = e^{-W_A(x) \left( \frac{b-x}{x-a} \right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}}} \phi, \quad (7)$$

$$W_A(x) = \int_a^x \frac{A(t)-A(a)}{(t-a)(b-t)} dt,$$

$\phi$  - доимии ихтиёрӣ мебошад.

Ҳамин тариқ, агар ҳалли муодилаи дифференсиалии намуди (4) мавҷуд бошад, пас онро ба намуди (7) ифода кардан мумкин аст. Вобаста ба усули тағйири доимии ихтиёрӣ, ҳалли муодилаи дифференсиалии ғайриякҷинсаи (3) – ро дар намуди зерин меҷӯем:

$$\eta(x) = e^{-W_A(x) \left( \frac{b-x}{x-a} \right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}}} \phi(x), \quad (8)$$

ки дар ин ҷо  $\phi(x)$  - функсияи номаълуми нав мебошад. Бо истифода аз усули муқарарӣ, барои ёфтани функсияи номаълуми  $\phi(x)$  ҳосил мекунем.

$$\phi'(x) e^{-W_A(x)} = \varpi'(x) \left( \frac{x-a}{b-x} \right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}}.$$

Ифодаи охирон ҳосилшударо интегронида ҳосил мекунем:

$$\phi(x) = \int_a^x \left( \frac{t-a}{b-t} \right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}} e^{W_A(t)} \varpi'(t) dt + C_0,$$

дар ин ҷо  $C_0$  – доимии ихтиёрӣ мебошад. Тарафи рости баробарии ҳосилшударо қисм ба қисм интегронида, талаб мекунем, ки функсияи  $\varpi(x)$  ҳангоми  $A(a) < 0$  дар нуқтаи  $x = a$  ба нол майл кунад, бо шarti асимптотикии зерин:

$$\varpi(x) = o[(x-a)^{\delta_1}] \quad \delta_1 > \frac{|A(a)|}{b-a} \quad \text{ҳангоми } x \rightarrow a, \quad (9)$$

Ҳамин тавр, баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\phi(x) = \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}} e^{W_A(x)} \varpi(x) - \int_a^x e^{W_A(t)} \left(\frac{t-a}{b-t}\right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \frac{A(t)f(t)}{(t-a)(b-t)} dt + C_0.$$

Қимати  $\phi(x)$  - ро ба формулаи (8) гузошта, пас аз табдилдиҳиҳои элементарӣ, ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} \eta(x) = e^{-W_A(x)} \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}} C_0 + \varpi(x) - \\ - \int_a^x e^{W_A(t)-W_A(x)} \left[\left(\frac{t-a}{b-t}\right) \cdot \left(\frac{b-x}{x-a}\right)\right]^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \frac{A(t)\varpi(t)}{(t-a)(b-t)} dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Тасвири (10) бо фарзияи он ки ҳалли муодилаи интегралӣ моделии намуди (2) мавҷуд аст ва функцияҳои  $\varpi(x)$ ,  $\eta(x)$  дифференсиронидашаванда мебошанд, ба даст оварда шудааст.

Қайд кардан лозим аст, ки дар тарафи рости (10) интеграл мавҷуд аст, агар ҳангоми  $A(a) < 0$  будан, функцияи  $A(x)$  дар атрофи нуқтаи  $x = a$  шарти Гёлдерро қаноат кунонад ва функцияи  $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$ ,  $\varpi(a) = 0$  бо шартҳои асимптотикии (9).

Бе воситаи санҷидан мумкин аст, ки барои наздикшавии интегралҳо дар қисми рости (10), зарурати дифференсиронидашавандагии функцияи  $\varpi(x)$  ҷой надорад. Пас, бо санҷиши бевосита ба осонӣ метавон бовари ҳосил кард, ки функцияи намуди

$$\eta_0(x) = e^{-W_A(x)} \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \cdot \phi, \quad A(a) < 0,$$

ҳалли умумии муодилаи яқчинсаи намуди (2) мебошад. Дар асоси [1], функцияи намуди

$$\eta_1(x) = \varpi(x) - \int_a^x e^{W_A(t)-W_A(x)} \left[\left(\frac{t-a}{b-t}\right) \left(\frac{b-x}{x-a}\right)\right]^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \frac{A(t)\varpi(t)}{(t-a)(b-t)} dt, \quad (11)$$

ҳангоми  $\varpi(x) \in C(\bar{\Gamma})$ ,  $\varpi(a) = 0$  шавад, бо шартҳои асимптотикии (9) ва муодилаи ғайри яқчинсаи намуди (2) - ро қаноат кунонад.

Қимати ёфташудаи функцияи  $\eta_1(x)$  - ро аз ифодаи (11) ба баробарии намуди (2) гузошта, ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} \varpi(x) - \int_a^x e^{W_A(t)-W_A(x)} \left[\left(\frac{t-a}{b-t}\right) \left(\frac{b-x}{x-a}\right)\right]^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \frac{A(t)\varpi(t)}{(t-a)(b-t)} dt + \\ + \int_a^x \frac{A(t)\varpi(t)}{(t-a)(b-t)} \left( \varpi(t) \int_a^t e^{W_A(\tau)-W_A(t)} \left[\left(\frac{\tau-a}{b-\tau}\right) \left(\frac{b-t}{t-a}\right)\right]^{\frac{A(a)}{(b-a)}} - \right. \\ \left. - \int_a^t \frac{A(\tau)\varpi(\tau)}{(\tau-a)(b-\tau)} d\tau \right) dt = \varpi(x). \end{aligned}$$

Ҳар ду тарафи ифодаи охириро ба функцияи  $\varpi(x)$  ихтисор карда, ҳосил мекунем:

$$- \int_a^x e^{W_A(t)-W_A(x)} \left[\left(\frac{t-a}{b-t}\right) \left(\frac{b-x}{x-a}\right)\right]^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \frac{A(t)\varpi(t)}{(t-a)(b-t)} dt +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_a^x \frac{A(t)\varpi(t)}{(t-a)(b-t)} dt - \int_a^x \frac{A(\tau)\varpi(\tau)}{(\tau-a)(b-\tau)} * \\
 & * \int_\tau^t e^{W_A(\tau)-W_A(t)} \left[ \left( \frac{\tau-a}{b-\tau} \right) \left( \frac{b-t}{t-a} \right) \right]^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \frac{A(t)}{(t-a)(b-t)} dt = 0.
 \end{aligned}$$

Формулаи Дрихлеро истифода бурда, тартиби интегронириро дар интегралҳои дуюм иваз мекунем:

$$\begin{aligned}
 & - \int_a^x e^{W_A(t)-W_A(x)} \left[ \left( \frac{t-a}{b-t} \right) \left( \frac{b-x}{x-a} \right) \right]^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \frac{A(t)\varpi(t)}{(t-a)(b-t)} dt \\
 & + \int_a^x \frac{A(t)\varpi(t)}{(b-t)(t-a)} dt - \int_a^x \frac{A(\tau)\varpi(\tau)}{(b-\tau)(\tau-a)} \int_\tau^t (e^{W_A(\tau)-W_A(t)} * \\
 & * \left[ \left( \frac{\tau-a}{b-\tau} \right) \left( \frac{b-t}{t-a} \right) \right]^{\frac{A(a)}{(b-a)}} d\tau) dt = 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Интегралҳои ифодаи (12) – ро ҳисоб карда ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}
 \chi(x, \tau) &= \int_\tau^x e^{W_A(\tau)-W_A(t)} \left[ \left( \frac{\tau-a}{b-\tau} \right) \left( \frac{b-t}{t-a} \right) \right]^{\frac{-A(a)}{(b-a)}} \frac{A(t)}{(b-t)(t-a)} dt = e^{W_A(\tau)} * \\
 & * \left[ \left( \frac{\tau-a}{b-\tau} \right) \right]^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \int_a^x e^{-W_A(t)} \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^{\frac{-A(a)}{(b-a)}} \frac{A(t)}{(t-a)(b-t)} dt.
 \end{aligned}$$

Қайд кардан ба маврид аст, ки пас аз каме табдилдиҳи ҳосил мекунем:

$$\frac{d}{dt} \left[ e^{-W_A(t)} \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \right] = -e^{-W_A(t)} \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \frac{A(a)}{(b-t)(t-a)}.$$

Ҳосияти ҳосилшударо истифода карда, интегралҳои дохилиро дар намуди зерин ифода мекунем:

$$\begin{aligned}
 \chi(x, \tau) &= e^{W_A(\tau)} \left[ \left( \frac{\tau-a}{b-\tau} \right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \right] \int_\tau^x \frac{d}{dt} \left[ e^{-W_A(t)} \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \right] = -e^{W_A(\tau)} * \\
 & * \left[ \left( \frac{\tau-a}{b-\tau} \right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \right] \left( e^{-W_A(t)} \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \right)_\tau^x = -e^{W_A(\tau)} \left[ \left( \frac{\tau-a}{b-\tau} \right)^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \right] * \\
 & * \left\{ e^{-W_A(x)} \left( \frac{x-a}{b-x} \right)^{\frac{-A(a)}{(b-a)}} - e^{-W_A(\tau)} \left( \frac{\tau-a}{b-\tau} \right)^{\frac{-A(a)}{(b-a)}} \right\} = -e^{W_A(\tau)-W_A(x)} * \\
 & * \left[ 1 + \left[ \left( \frac{b-x}{x-a} \right) \left( \frac{\tau-a}{b-\tau} \right) \right]^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \right].
 \end{aligned}$$

Қимати ҳисобшудаи интегралҳои дохилиро ба баробарии (12) гузошта, ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}
 & - \int_a^x e^{W_A(t)-W_A(x)} \left[ \left( \frac{b-x}{x-a} \right) \left( \frac{t-a}{b-t} \right) \right]^{\frac{A(a)}{(b-a)}} \frac{A(t)\varpi(t)}{(t-a)(b-t)} dt + \int_a^x \frac{A(t)\varpi(t)}{(t-a)(b-t)} dt - \\
 & - \int_a^t \frac{A(\tau)\varpi(\tau)}{(\tau-a)(b-\tau)} \left\{ -e^{W_A(\tau)+W_A(x)} \left[ \left[ \left( \frac{b-x}{x-a} \right) \left( \frac{t-a}{b-t} \right) \right]^{\frac{A(a)}{(b-a)}} + 1 \right] \right\} d\tau = 0.
 \end{aligned}$$

Чи тавре, ки маълум гашт айният ҳосил шуд, яъне дар ягон ҷо дифференсиронидашавандагии функцияи  $\varpi(x)$  истифода нашудааст.

Ба ҳамин тариқ муҳокимаронии зерин ҷой дорад:

**Теоремаи 1.** Бигзор дар муодилаи якченакаи моделии (1), функцияи  $A(x) \in C[a, b]$  ва дар нуқтаи сингулярии  $x = a$  шarti Гёлдерро қаноат кунонад,  $A(a) < 0$ . Функцияи  $\varpi(x)$  дар  $\bar{\Gamma}$  бефосила бошад, инчунин дар нуқтаи  $x = a$ , ба нол майл кунад, бо шarti асимптотикии зерин:

$$\varpi(x) = o[(x-a)^\gamma], \quad \gamma > \frac{|A(a)|}{b-a}, \quad x \rightarrow a.$$

Онгоҳ дилхоҳ ҳалли муодилаи моделии интеграллии (1)-ро аз синфи  $C[a, b]$  ба намуди зерин тасвир кардан мумкин аст:

$$\eta(x) = \exp[W_A(x)] \cdot \xi\left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\frac{|A(a)|}{b-a}} + \varpi(x) - \int_a^t \left[\left(\frac{b-t}{t-a}\right) \cdot \left(\frac{x-a}{b-x}\right)\right]^{\frac{|A(a)|}{b-a}} \cdot \frac{A(t)\varpi(t)}{(b-t)(t-a)} \exp[W_A(t) - W_A(x)] dt \equiv K_\alpha[\phi, \varpi(x)], \quad (13)$$

дар ин ҷо  $\phi$  – доимии ихтиёрӣ мебошад,

$$W_A(x) = \int_a^x \frac{A(t) - A(a)}{(t-a)(b-t)} dt.$$

Дар асоси тасвири интеграллии ҳосилшуда масъалаҳои гуногуни канорӣ гузошта ва тадқиқ карда мешаванд:

**Масъалаи  $\Theta_1$ .** Талаб карда мешавад, ки бо истифода аз шarti канории дар зер овардашуда, ҳалли муодилаи (1.2) аз синфи  $C[a, b]$  ҳангоми  $A(a) < 0$ , ёфта шавад, яъне:

$$\left[(x-a)^{\frac{A(a)}{b-a}} \eta(x)\right]_{x=a} = E_K, \quad (\Theta_1)$$

ки  $E_K$  – доимии додашуда.

**Ҳалли масъалаи  $\Theta_1$ .** Бигзор функцияи  $A(x)$ ,  $\varpi(x)$  дар муодилаи моделии интеграллии (1) шartҳои теоремаи 1. – ро қаноат кунонад. Бо истифода аз тасвири интеграллии (1.13), хосияти (4) ва шarti  $(\Theta_1)$ , ҳосил мекунем:

$$\phi_K = E_K(b-a)^{\frac{|A(a)|}{b-a}}.$$

Ифодаи ёфташудаи  $\phi_K$  – ро ба баробарии (13) гузошта, ҳалли масъалаи  $\Theta_1$  – ро меёбем, ки ба намуди зерин дода мешавад:

$$\eta(x) = K_\alpha \left[ \varpi(x), E_K(b-a)^{\frac{|A(a)|}{b-a}} \right]. \quad (14)$$

**Теоремаи 2.** Бигзор функцияҳои дар (1) мавҷудбуда шartҳои шartҳои теоремаи 1. – ро қаноат кунонад. Он гоҳ масъалаи  $\Theta_1$  дорои ҳалли ягона мебошад, ки бо ёрии формулаи (14) дода мешавад.

**Масъалаи  $\Theta_2$ .** Ҳалли муодилаи (14) – ро дар синфи  $C[a, b]$  ҳолати  $A(a) < 0$ , муайян кунед, ки шarti зеринро қаноат мекунонад:

$$\left[(b-x)^{\frac{|A(a)|}{b-a}} \eta(x) e^{W_A(x)}\right]_{x=b} = \Delta_2, \quad (\Delta_2)$$

дар ин ҷо  $\Delta_2$  – доимии додашуда аст.

**Ҳалли масъалаи  $\Theta_2$ .** Ҳангоми иҷрошавии шartҳои теоремаи 1. ва бо истифодаи хосияти намуди

$$\left[\eta(x) (x-a)^{\frac{A(a)}{b-a}}\right]_{x=a} = \phi_K(b-a)^{\frac{A(a)}{b-a}}, \quad \text{ва шarti } (\Delta_2) \text{ баробарии зеринро ҳосил мекунем:}$$

$$\left[ e^{W_A(x)} \eta(x) (b-x)^{\frac{|A(a)|}{b-a}} \right]_{x=b} = (b-a)^{\frac{|A(a)|}{b-a}} * \\ * \left[ \phi_k + (\varpi(x) \exp[W_A(x)])_{x=b} (b-a)^{\frac{|A(a)|}{b-a}} - \int_a^b \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^{\frac{|A(a)|}{b-a}} \exp[W_A(t)] \frac{\varpi(t) A(t)}{(t-a)(b-t)} dt \right] = \Delta_2.$$

Аз ин ҷо ҳосил менамоем:

$$\phi_k = -(b-a)^{\frac{|A(a)|}{b-a}} (\varpi(x) \exp[W_A(x)])_{x=b} + \Delta_2 (b-a)^{\frac{|A(a)|}{b-a}} + \\ + \int_a^b \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^{\frac{|A(a)|}{b-a}} \frac{A(t) f(t)}{(t-a)(b-t)} \exp[W_A(t)] dt \equiv T[\Delta_2, f(x)]. \quad (15)$$

Аз тасвири интегралӣ (15) натиҷа бар меояд, ки барои барои наздикшавии интеграл дар тарафи рости ифодаи намуди (15), ғайр аз иҷрошавии шартҳои теоремаи 1. зарур аст, ки  $f(b)=0$  бо шarti асимптотикии зерин:

$$\varpi(x) = o[(b-x)^{\delta_1}] \quad \delta_1 > \frac{|A(a)|}{(b-a)}, \quad \text{ҳангоми } x \rightarrow b. \quad (16)$$

Қимати ёфташудаи  $\phi_k$  – ро дар тасвири интегралӣ (13) гузошта, ҳалли масъалаи  $\Theta_2$  – ро меёбем:

$$\eta(x) = K_a [T[\Delta_2, \varpi(x)], \varpi(x)], \quad (17)$$

дар ин ҷо  $T[\Delta_2, \varpi(x)]$  операторҳои интегралӣ мебошанд.

**Теорема 3.** Фарз мекунем, ки функсияҳои дар муодилаи моделии интегралӣ (1) мавҷуд буда, ҳамаи шартҳои теоремаи 1. – ро қаноат кунонанд. Ғайр аз ин, бигзор функсияи  $f(x)$  дар нуқтаи  $x = b$  ба сифр майл кунад бо рафтори асимптотикии (16). Инчунин функсияи  $\varpi(x)$  чунин бошад, ки  $(\varpi(x) \exp[W_A(x)])_{x=b}$  – мавҷуд бошад. Онгоҳ масъалаи  $\Theta_2$  дорои ҳалли ягона мебошад ва бо ёрии формулаи (17) дода мешавад.

**Қайди 1.** Бо дар назардошти теоремаи 1 муҳокимаронии зерин бар меояд:

**Теоремаи 4.** Бигзор дар муодилаи моделии (2),  $A(t) = \lambda = \text{const} < 0$ , инчунин функсияи  $f(x)$  дар порчаи  $[a, b]$  бефосила бошад ва дар нуқтаи  $x = a$  ба сифр майл кунад бо шarti талабкардашудаи зерин:

$$\varpi(x) = o[(b-x)^{\gamma_1}], \quad \gamma_1 > \frac{|\lambda|}{(b-a)} \quad \text{ҳангоми } x \rightarrow a.$$

Бо назардошти гуфтаҳои боло ҳалли муодилаи

$$\eta(x) + \lambda \int_a^x \frac{\eta(t)}{(t-a)(b-t)} dt = \varpi(x), \quad (18)$$

аз синфи функсияҳо бефосила дар намуди зерин тасвир мегардад:

$$\eta(x) = \phi \left( \frac{x-a}{b-x} \right)^{\frac{|\lambda|}{b-a}} + \varpi(x) - \lambda \int_a^x \frac{\varpi(t)}{(t-a)(b-t)} \left[ \left( \frac{b-t}{t-a} \right) \cdot \left( \frac{x-a}{b-x} \right) \right]^{\frac{|\lambda|}{b-a}} dt = K_a^\lambda [\phi, \varpi(x)]$$

дар ин ҷо  $\xi$  - доимии ихтиёрист.

Дар ҳолате, ки  $A(t) = \lambda > 0$  бошад, онгоҳ муҳокимаронии зерин ҷой дорад.

**Теоремаи 5.** Бигзор дар муодилаи моделии интегралӣ (18)  $\lambda > 0$ , ва функсияи  $f(x)$  дар порчаи маҳдуди  $[a, b]$  бефосила бошад ва дар нуқтаи  $x = a$  ба нол майл кунад, бо шarti талабкардашудаи зерин:

$$f(x) = o[(x-a)^\varepsilon] \quad \varepsilon > 0 \quad \text{ҳангоми } x \rightarrow a.$$

Онгоҳ муодилаи моделии интегралӣ (18) дар синфи функсияҳои бефосилаи  $\eta(x)$  дар ниминтервали  $[a, b)$  бо ёрии баробарии зерин дода мешавад:

$$\eta(x) = \varpi(x) - \lambda \int_a^x \left[ \left( \frac{t-a}{b-t} \right) \cdot \left( \frac{b-x}{x-a} \right) \right]^{\frac{\lambda}{b-a}} \frac{\varpi(t)}{(b-t)(t-a)} dt.$$

**Муҳокима (Discussions)**

Натиҷаҳои дар ин тадқиқот бадастомада нишон медиҳанд, ки омӯзиши масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои интегралӣ моделии Вольтерра бо нуқтаҳои сингулярии қайдшуда (аз чап ва рост) дорои хусусиятҳои хоси назариявӣ мебошад.

Муқоиса бо усулҳои муқаррарӣ: Усулҳои пешниҳодшуда имконият медиҳанд, ки мушкилоти пайдошуда ҳангоми таҳлили муодилаҳои сингуляро, ки бо роҳҳои муқаррарии назарияи Фредгольм ё Вольтерра ҳал намешаванд, ба таври самарабахш рафъ намоем.

Тасвири интегралӣ ҳалҳо: Ҳангоми мавҷудияти нуқтаҳои сингулярӣ, тасвири умумии ҳалҳо метавонад аз функсияҳои ихтиёрӣ ё доимӣҳои ихтиёрӣ вобастагӣ пайдо кунад. Ин ҳолат ба таври аниқ гузаштани шартҳои канориро тақозо менамояд, то гузориш ва дурустии масъала таъмин гардад.

Амиқии гузориши масъала: Истифодаи тасвирҳои интегралӣ ва хосиятҳои онҳо имкон дод, ки синфи функсияҳое, ки дар онҳо масъалаи канорӣ ҳалли ягона ва устувор дорад, дақиқ муайян карда шавад. Ин тасдиқ мекунад, ки шартҳои канорӣ гузашташуда табиати сингулярии ядро ё ҳудудҳоро ба эътибор мегиранд.

Натиҷаҳои бадастомада метавонанд дар таҳқиқи муодилаҳои дифференциалӣ интегралӣ, ки дорои коэффитсиентҳои сингулярӣ, инчунин дар моделиронии математикии равандҳое, ки дар онҳо ҳодисаҳои сарҳадӣ ё таъсири фаврӣ (сингулярӣ) ҷой доранд, истифода шаванд.

**Хулоса (Conclusion)**

Қайд кардан ба маврид аст, ки ҳалли умумии муодилаи моделии болозикргардида доимӣҳои ихтиёрӣ дар бар мегирад. Барои ёфтани ин доимӣҳои ихтиёрӣ шартҳои канорӣ гузашта шуда, доимӣҳои ихтиёрии дар муодилаи интегралӣ якченака иштироккунанда ба таври ошкор ёфта шудаанд. Масъалаи канорӣ гузашта ва таҳқиқ шудааст. Усулҳои дар боло омӯхташуда ва натиҷаҳои бадастовардари ба назар гирифта, қайд кардан лозим аст, ки барои дар оянда рушди назарияи муодилаҳои интегралӣ якченака, дученака ва бисёрченака бо нуқтаҳои сингулярӣ ва суперсингулярӣ, ғайр аз ин барои дигар масъалаҳои гуногуни тадқиқи истифода бурдан ба маврид аст.

*Муқаррир: Бобоёрв Ш.Қ. – н.и.ф.-м., дотсенти қабедраи математикаи олии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон.*

**Адабиёт**

1. Раджабов, Н. Интегральные уравнения типа Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения / Н. Раджабов. — Душанбе : Издательство «Деваштич», 2007. — 221 с.
2. Зарипов, С. Б. Немодельное двумерное симметричное интегральное уравнение волтерровского типа с одной граничной и одной внутренней сверхсингулярной линией / С. Б. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. — 2016. — № 1/2 (196). — С. 27–32.
3. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. — М. : Наука, 1977. — 640 с.
4. Раджабов, Н. К. теории одного класса двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра со сверхсингулярной линией, симметричного относительно одной из переменных / Н. Раджабов, С. Б. Зарипов // Известия Академии наук Республики Таджикистан. — 2020. — № 1 (178). — С. 37–43.
5. Раджабов, Н. Двухмерные симметричные интегральные уравнения типа Вольтерра с сингулярными и сверхсингулярными линиями / Н. Раджабов, Л. Н. Раджабова, С. Б. Зарипов. — Germany : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2019. — 112 с. — ISBN 978-620-0-46924-3.
6. Зарипов, С. Б. Немодельное двумерное симметричное интегральное уравнение волтерровского типа с одной граничной и одной внутренней сингулярной линией / С. Б. Зарипов, Н. Раджабов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. — 2016. — № 1/1 (192). — С. 73–78.
7. Раджабов, Н. Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения / Н. Раджабов, Л. Н. Раджабова. — Germany : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. — 502 с.
8. Раджабов, Н. Об одном классе двумерного симметричного интегрального уравнения Вольтерровского типа с одной граничной и одной внутренней сингулярной линиями / Н. Раджабов, С. Б. Зарипов // Актуальные проблемы науки и техники в современном вузе : материалы Международной научно-теоретической конференции, 23–25 мая 2019 г., г. Стерлитамак, на базе Стерлитамакского филиала БашГУ. — Стерлитамак, 2019. — С. 165–171.
9. Раджабов, Н. Двухмерное симметричное интегральное уравнение Вольтерра с двумя сингулярными линиями / Н. Раджабов, С. Б. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. — 2015. — № 1/4 (168). — С. 3–8.
10. Раджабов, Н. Немодельные двумерные симметричные интегральные уравнения Вольтерровского типа с сингулярной линией в частных случаях / Н. Раджабов, С. Б. Зарипов // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы

: материалы Международной научной конференции, посвященной 110-летию основателя Самарской математической школы профессора С. П. Пулькина и 90-летию профессора В. Ф. Волкодавова. — Самара, 2017. — С. 83–85.

11. Зарипов, С. Б. Краевые задачи для двумерного интегрального уравнения со сверхсингулярной линией, симметричного относительно переменной  $X$  / С. Б. Зарипов // Эпистемологические основания современного образования: актуальные вопросы продвижения фундаментального знания в учебный процесс : материалы Международной научно-практической конференции. — Борисоглебск : Воронежский государственный университет, 2020. — С. 358–361.

12. Раджабова, Л. Н. Задача типа Коши с условиями на сингулярных многообразиях для одного класса немодельных интегральных уравнений типа Вольтерра с внутренними особыми линиями / Л. Н. Раджабова // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. — Душанбе : Сино, 2011. — № 8 (72). — С. 11–20.

## References

1. Rajabov, N. Volterra-Type Integral Equations with Fixed Boundary and Interior Singular and Super-Singular Kernels and Their Applications / N. Rajabov. — Dushanbe : Devashtich Publishing House, 2007. — 221 p.

2. Zarirov, S. B. Non-Model Two-Dimensional Symmetric Integral Equation of Volterra Type with One Boundary and One Internal Super-Singular Line / S. B. Zarirov // Bulletin of the Tajik National University. Series of Natural Sciences. — 2016. — No. 1/2 (196). — P. 27–32.

3. Gakhov, F. D. Boundary Value Problems / F. D. Gakhov. — Moscow : Nauka, 1977. — 640 p.

4. Rajabov, N. On the Theory of One Class of Two-Dimensional Integral Equations of Volterra Type with a Super-Singular Line Symmetric with Respect to One of the Variables / N. Rajabov, S. B. Zarirov // Bulletin of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. — 2020. — No. 1 (178). — P. 37–43.

5. Rajabov, N. Two-Dimensional Symmetric Integral Equations of Volterra Type with Singular and Super-Singular Lines / N. Rajabov, L. N. Rajabova, S. B. Zarirov. — Germany : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2019. — 112 p. — ISBN 978-620-0-46924-3.

6. Zarirov, S. B. Non-Model Two-Dimensional Symmetric Integral Equation of Volterra Type with One Boundary and One Internal Singular Line / N. Rajabov, S. B. Zarirov // Bulletin of the Tajik National University. Series of Natural Sciences. — 2016. — No. 1/1 (192). — P. 73–78.

7. Rajabov, N. Introduction to the Theory of Multidimensional Integral Equations of Volterra Type with Fixed Singular and Super-Singular Kernels and Their Applications / N. Rajabov, L. Rajabova. — Germany : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. — 502 p.

8. Rajabov, N. On One Class of Two-Dimensional Symmetric Integral Equation of Volterra Type with One Boundary and One Internal Singular Line / N. Rajabov, S. B. Zarirov // Proceedings of the International Scientific-Theoretical Conference “Current Issues of Science and Technology in a Modern University”, May 23–25, 2019, Sterlitamak, at the Sterlitamak Branch of Bashkir State University. — Sterlitamak, 2019. — P. 165–171.

9. Rajabov, N. Two-Dimensional Symmetric Integral Volterra Equation with Two Singular Lines / N. Rajabov, S. B. Zarirov // Bulletin of the Tajik National University. Series of Natural Sciences. — 2015. — No. 1/4 (168). — P. 3–8.

10. Rajabov, N. Non-Model Two-Dimensional Symmetric Integral Equations of Volterra Type with a Singular Line in Special Cases / N. Rajabov, S. B. Zarirov // Proceedings of the International Scientific Conference “Differential Equations and Related Problems”, Dedicated to the 110th Anniversary of the Founder of the Samara Mathematical School, Professor S. P. Pulkin, and the 90th Anniversary of Professor V. F. Volkodavov. — Samara, 2017. — P. 83–85.

11. Zarirov, S. B. Boundary Value Problems for a Two-Dimensional Integral Equation with a Super-Singular Line, Symmetric with Respect to the Variable  $X$  / S. B. Zarirov // Proceedings of the International Scientific and Practical Conference “Epistemological Foundations of Modern Education: Current Issues in Promoting Fundamental Knowledge in the Educational Process”. — Borisoglebsk : Voronezh State University, 2020. — P. 358–361.

12. Rajabova, L. N. A Cauchy-Type Problem with Conditions on Singular Manifolds for One Class of Non-Model Integral Equations of Volterra Type with Internal Singular Lines / L. N. Rajabova // Bulletin of the Tajik National University. Series of Natural Sciences. — Dushanbe : Sino, 2011. — No. 8 (72). — P. 11–20.

### Маълумот оид ба муаллиф:

**Зарипов Сухроб Бобокулович**, номзади илмҳои физика ва математика, дотсенти кафедраи математикаи оӣ, Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9119-0388>. E-mail: [zaripov\\_s89@mail.ru](mailto:zaripov_s89@mail.ru)

### Сведения об авторе:

**Зарипов Сухроб Бобокулович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Таджикский технический университет имени академика М.С. Осими. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9119-0388>. E-mail: [zaripov\\_s89@mail.ru](mailto:zaripov_s89@mail.ru)

### Information about the author:

**Zaripov Suhrob Bobokulovich**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Higher Mathematics department, Tajik Technical University named after Academician M.S. Osimi. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9119-0388>. E-mail: [zaripov\\_s89@mail.ru](mailto:zaripov_s89@mail.ru)