

УДК: 517.9

DOI: 10.65599/III3000

СОХТАНИ ПРОЕКТОРҲОИ ҒАЙРИХАТӢ БАРОИ СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ТАРАФИ РОСТАШОН АНАЛИТИКӢ

М.М. Садриддинов

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ, ш. Душанбе, Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар мақола усули сохтани проекторҳои ғайрихаттӣ барои системаи муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ, ки қисми рости онҳо дар фазои Банах аналитикӣ мебошад, баррасӣ мегардад. Мақсади асосии тадқиқот таҳия ва асоснок намудани дастгоҳи мукаммали математикӣ барои сохтани проекторҳои ғайрихаттӣ, муайян кардани хусусиятҳои аналитикии онҳо ва татбиқи самаранокӣ ин проекторҳо дар таҳлил ва омӯзиши амиқи сохтори динамикӣ, хосиятҳои сифатӣ ва рафтори локалии системаи муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ мебошад. Проекторҳои ғайрихаттӣ сохтасуда имкон медиҳанд, ки фазои фазавӣ ба зерфазоҳои инвариантии мувофиқ ба бисёршаклаҳои устувор, ноустувор ва марказӣ ҷудо карда шавад. Дар усули пешниҳодшуда ҷудокунии спектралӣ қисми хаттӣ система ҳамчун воситаи асосии омӯзиши хусусиятҳои динамикии қисми ғайрихаттӣ истифода мешавад. Натиҷаҳои тадқиқот аҳамияти проекторҳои ғайрихаттӣро дар ошкорсозии сохтори геометрии фазои фазавӣ, таҳлили устувории ноустуворӣ ва инчунин омӯзиши рафтори асимптотикии ҳалли система дар атрофи нуқтаи мувозинат нишон медиҳанд. Усули мазкур инчунин имкон медиҳад, ки робитаи байни хусусиятҳои спектралӣ қисми хаттӣ ва сохтори динамикии қисми ғайрихаттӣ система муайян карда шавад. Дар қисми хотимаӣ мисоли мушаххас оварда шуда, алгоритми сохтани проекторҳои ғайрихаттӣ ва татбиқи амалии усули пешниҳодшуда пайдарпай нишон дода мешавад.

Калидвожаҳо: системаи муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ, проекторҳои ғайрихаттӣ, проекторҳои хаттӣ, ҷудокунии спектралӣ, фазои Банахӣ, зерфазоҳои инвариантии, бисёршаклаҳои устувор, ноустувор ва марказӣ, спектри матритса, назарияи устуворӣ, функсияи аналитикӣ.

ПОСТРОЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЕКТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

М.М. Садриддинов

Таджикский технический университет имени М.С. Осими, г. Душанбе, Республика Таджикистан

В статье рассматривается метод построения нелинейных проекторов для систем нелинейных дифференциальных уравнений с аналитической правой частью в банаховом пространстве. Основной целью исследования является разработка и теоретическое обоснование математического аппарата построения нелинейных проекторов, исследование их аналитических свойств, а также применение полученных результатов для углублённого анализа динамической структуры, качественных характеристик и локального поведения нелинейных систем дифференциальных уравнений. Построенные нелинейные проекторы позволяют разбить фазовое пространство на инвариантные подпространства, соответствующие устойчивому, неустойчивому и центральному многообразиям. В предлагаемом методе спектральное разложение линейной части системы используется как основной инструмент исследования динамических свойств ее нелинейной части. Результаты исследования демонстрируют важность нелинейных проекторов для выявления геометрической структуры фазового пространства, анализа устойчивости и неустойчивости, а также для изучения асимптотического поведения решений в окрестности точки равновесия. Данный метод также позволяет установить взаимосвязь между спектральными характеристиками линейной части и динамической структурой нелинейной части системы. В заключительной части приводится конкретный пример, последовательно иллюстрирующий алгоритм построения нелинейных проекторов и практическое применение предложенного метода.

Ключевые слова: системы нелинейных дифференциальных уравнений, нелинейные проекторы, линейные проекторы, спектральное разложение, банахово пространство, инвариантные подмножества, устойчивые, неустойчивые и центральные многообразия, спектр матрицы, теория устойчивости, аналитическая функция.

CONSTRUCTION OF NONLINEAR PROJECTORS FOR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH AN ANALYTIC RIGHT-HAND SIDE

M.M. Sadriddinov

Tajik technical university named after academician M.S. Osimi, Dushanbe, Republic of Tajikistan

The article considers a method for constructing nonlinear projectors for systems of nonlinear differential equations with an analytic right-hand side in a Banach space. The main objective of the study is to develop and provide a theoretical justification for a mathematical framework for constructing nonlinear projectors, to investigate their analytic properties, and to apply the obtained results to an in-depth analysis of the dynamical structure, qualitative characteristics, and local behavior of nonlinear systems of differential equations. The constructed nonlinear projectors make it possible to decompose the phase space into invariant sets corresponding to stable, unstable, and center manifolds. In the proposed method, the spectral decomposition of the linear part of the system is used as the main tool for investigating the dynamical properties of its nonlinear part. The results of the study demonstrate the importance of nonlinear projectors in revealing the geometric structure of the phase space, analyzing stability and instability, and studying the asymptotic behavior of solutions in the neighborhood of an equilibrium point. This method also makes it possible to establish the relationship between the spectral characteristics of the linear part and the dynamical structure of the nonlinear part of the system. In the final section, a specific example is presented, illustrating the algorithm for constructing nonlinear projectors and the practical application of the proposed method.

Keywords: systems of nonlinear differential equations, nonlinear projectors, linear projectors, spectral decomposition, banach space, invariant manifolds, stable, unstable and central manifolds, matrix spectrum, stability theory, analytic function.

Муқаддима (Introduction)

Проекторҳои ғайрихаттӣ дар бисёр масъалаҳои механика, физика, идоракунии оптималӣ, назарияи сифатии муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаҳои муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ нақши муҳим мебозанд. Ин масъалаҳо дар тадқиқоти илмӣ муҳаққиқони бузурги соҳа К.Г. Валеев [1], А.М. Ляпунов [5], Л.С. Понтрягин [7] ва шогирдони онҳо ба таври назаррас инъикос ёфтаанд. Мақсади асосии истифодаи проекторҳои ғайрихаттӣ дар масъалаи мазкур аз ҷудо намудани фазои ҳолати система ба зерфазоҳои инвариантӣ иборат аст, ки ҳар кадоми онҳо хусусиятҳои динамикии хоси худро доранд. Чунин ҷудокунии фазо ба зерфазоҳои инвариантӣ имконият медиҳад, ки ҳолатҳои устуворӣ, ноустуворӣ ва рафтори асимптотикии система дақиқтар муайян карда шуда, ҳалли масъалаи мазкур осонтар гардад. Илова бар ин, сохтани проекторҳои ғайрихаттӣ барои системаҳои муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ тарафи рӯсташон аналитикӣ ҳанӯз ҳам яке аз самтҳои муҳими таҳқиқоти муосир ба шумор меравад.

Мавод ва усулҳои тадқиқот (Materials and Methods)

Тадқиқоти мазкур ба омӯзиш ва таҳияи усули сохтани проекторҳои ғайрихаттӣ барои системаи муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ тарафи рӯсташон аналитикӣ дар фазои Банахӣ бахшида шудааст. Бо мақсади сохтани проекторҳои ғайрихаттӣ ва омӯзиши хусусиятҳои динамикии системаи мазкур, системаи муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon F_1(t, x, y) + \varepsilon E_1(t, x, y), & x \in \mathbf{B}_1, \\ \frac{dy}{dt} = By + \varepsilon F_2(t, x, y) + \varepsilon E_2(t, x, y), & y \in \mathbf{B}_2 \end{cases} \quad (1)$$

- ро бо шартҳои аввалаи

$$x(t_0) = x_0 \text{ ва } y(t_0) = y_0 \quad (2)$$

мавриди баррасӣ ва тадқиқ қарор медиҳем. Қайд мекунем, ки дар ин ҷо $x(t) \in R^m$ ва $y(t) \in R^n$ - функцияҳои номаълум, $A (A \in R^{m \times m})$ ва $B (B \in R^{n \times n})$ - матритсаҳои андозаҳои мувофиқ $m \times m$ ва $n \times n$, $\varepsilon (0 < \varepsilon < 1)$ - параметр, $F_j(t, x, y)$ ва $E_j(t, x, y)$ ($j=1, 2$) - вектор-функцияҳои маҳдуди мутаалуқи фазои Банахӣ $\mathbf{B}_1$ ва $\mathbf{B}_2$ мебошанд.

Фарз мекунем, ки вектор - функцияҳои $F_j(t, x, y)$ ва $E_j(t, x, y)$ ($j=1, 2$) дар соҳаи D :

$$\|x\| \equiv \max_{1 \leq j \leq m} \|x_j\| \leq \delta, \|y\| \equiv \max_{1 \leq s \leq n} \|y_s\| \leq \delta, \delta > 0, -\infty < t < +\infty, \quad (*)$$

муайян мебошанд, нисбат ба t бефосила буда, дар атрофи нуқтаи $(0, 0)$ нисбат ба тағйирёбандаҳои фазавии x ва y барои ҳамаи қиматҳои мувофиқи параметр шарти Липшицро қонеъ мегардонанд [1]:

$$\begin{aligned} & \|F_1(t, x_1, y_1) - F_2(t, x_2, y_2)\| + \|E_1(t, x_1, y_1) - E_2(t, x_2, y_2)\| \leq \\ & \leq L_1 \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| + L_2 \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|, \end{aligned}$$

ки дар ин ҷо L_1 ва L_2 - доимии Липшиц мебошанд. Иҷро гардидани шартҳои мазкур барои асоснок намудани мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи Кошӣ аҳамияти муҳим дошта, инчунин имконияти таҳлили вобастагии ҳалли система аз шартҳои аввала ва параметрҳои фароҳам меорад.

Барои содатар намудани таҳлили минбаъдаи масъала ва таъмини тадбиқпазирии усулҳои пешниҳодшуда нисбат ба системаҳои (1) ҳангоми $x = 0$ ва $y = 0$ ва қиматҳои муайяни параметр маҳдудиятҳои зеринро дохил менамоем:

$$|F_j(t, x, y)| \leq M_1 \text{ ва } \|E_j(t, x, y)\| \leq M_2 \quad (j=1, 2), \quad (**)$$

ки дар ин ҷо $M_r (r=1, 2)$ - ададҳои доимии мусбат мебошанд. Маҳдудиятҳои дохилшуда имкон медиҳанд, ки таъсири қисми ғайрихаттӣ система ба рафтори ҳалли он баҳогузорӣ гардида, шарти

зарурӣ барои тадқиқи усулҳои таҳлили сифатӣ таъмин карда шаванд. Дар ҷараёни тадқиқот усулҳои назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ дар фазои Банахӣ, таҳлили функционалӣ, назарияи операторҳо ва усулҳои таҳлили математикӣ истифода мешаванд. Бо истифода аз ин усулҳо шартҳои мавҷудият ва ягонагии ҳалли система, вобастагии он аз шартҳои аввала ва параметрҳо, инчунин хусусиятҳои сифатӣ ва сохтори динамикии ҳалли система таҳлил карда мешаванд. Ҳамчунин, дар тадқиқот хусусиятҳои спектралӣ қисми ҳаттии система ҳамчун воситаи асосии омӯзиши динамикаи қисми ғайрихаттӣ истифода мешаванд. Ин равиш имконият медиҳад, ки таъсири қисми ғайрихаттӣ ба сохтори фазои фазавӣ муайян гардида, заминаи назариявӣ барои сохтани проекторҳои ғайрихаттӣ ва таҳлили зерфазоҳои инвариантии система фароҳам оварда шавад.

Натиҷаҳои тадқиқот (Results)

Бигзор, дар системаи (1) параметри $\varepsilon = 0$ бошад. Дар ин ҳолат системаи (1) ба ду зерсистемаи муодилаҳои дифференсиалии ҳаттии аз ҳамдигар новобаста ҷудо мешавад, ки дорои хосияти экспоненсиалию дихотомӣ [2] мебошанд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax, & x \in \mathbf{B}_1, \\ \frac{dy}{dt} = By, & y \in \mathbf{B}_2. \end{cases} \quad (3)$$

Бо назардошти шартҳои (2) ва нобаробариҳои (*) ва (**), ҳалли системаи (3) намуди зеринро мегирад:

$$\begin{cases} x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0, \\ y(t) = e^{B(t-t_0)} y_0, \end{cases} \quad (4)$$

ки дар ин ҷо $\|e^{A(t-t_0)}\| \leq P e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (t \geq t_0)$ ва $\|e^{B(t-t_0)}\| \leq N e^{\beta(t-t_0)} \quad (t < t_0)$ мебошад.

Бо истифода аз нобаробариҳои (*), (**) ва системаи (4), иняунин тадқиқи усули вариатсияҳои доимӣҳои ихтиёрӣ системаи (1) - ро ба намуди интегралӣ меорем [3]:

$$\begin{cases} x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \varepsilon \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} [F_1(s, x(s), y(s)) + E_1(s, x(s), y(s))] ds, \\ y(t) = e^{B(t-t_0)} y_0 + \varepsilon \int_{t_0}^t e^{B(t-s)} [F_2(s, x(s), y(s)) + E_2(s, x(s), y(s))] ds. \end{cases} \quad (5)$$

Барои ҳалли системаи (5) усули тақрибҳои пайдарпайро истифода мекунем ва тақрибҳои ибтидоиро интихоб мекунем:

$$x^{(0)}(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$$

ва

$$y^{(0)}(t) = e^{B(t-t_0)} y_0.$$

Барои ҳисоб намудани тақрибии k ($k = 0, 1, 2, \dots$) - ум узви боқимондаи пайдарпайро бо формулаҳои зерин ҳисоб мекунем:

$$x^{(k+1)}(t) \approx e^{A(t-t_0)} x_0 + \varepsilon \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} [F_1(s, x^{(k)}, y^{(k)}) + E_1(s, x^{(k)}, y^{(k)})] ds \quad (6)$$

ва

$$y^{(k+1)}(t) \approx e^{B(t-t_0)} y_0 + \varepsilon \int_{t_0}^t e^{B(t-s)} [F_2(s, x^{(k)}, y^{(k)}) + E_2(s, x^{(k)}, y^{(k)})] ds. \quad (6a)$$

Мувофиқи шarti Липшиц нобаробариҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon \int_{t_0}^t e^{A\|t-s\|} [(L_1 + M_1)(\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| + \|y^{(k)} - y^{(k-1)}\|)] ds.$$

Агар шарт $\|e^{A(t)}\| \leq M_A$ иҷро гардад, аз нобаробарии охирин ҳосил мекунем [3-4]:

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon M_A (L_1 + M_1) \int_{t_0}^t e^{A\|t-s\|} [\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| + \|y^{(k)} - y^{(k-1)}\|] ds.$$

Ба ҳамин монанд, нисбат ба тағйирёбандаи $y(t)$ низ шарт Липшитсро истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\|y^{(k+1)} - y^{(k)}\| \leq \varepsilon M_B (L_2 + M_2) \int_{t_0}^t e^{B\|t-s\|} [\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| + \|y^{(k)} - y^{(k-1)}\|] ds.$$

Агар бузургии мазкурро бо адади

$$K = \max \{M_A (L_1 + M_1), M_B (L_2 + M_2)\}$$

ифода кунем, он гоҳ аз нобаробариҳои охирин ҳосил мекунем:

$$\|z^{(k+1)} - z^{(k)}\| \leq \varepsilon K \int_{t_0}^t \|z^{(k)} - z^{(k-1)}\| ds,$$

ки дар ин ҷо $z = (x, y)$ аст [2-5]. Барои сохтани проекторҳои ғайрихаттӣ теоремаи зеринро бе исбот дохил мекунем.

Теорема. Бигзор, вектор - функсияҳои $F_j(t, x, y)$ ва $E_j(t, x, y)$ ($j=1, 2$) дар соҳаи D муайян буда, нисбат ба t бефосила бошанд ва дар атрофи нуқтаи $(0, 0)$ нисбат ба тағйирёбандаҳои x ва y шарт Липшитсро қонеъ гардонанд. Агар спектри қисми хаттии системаи (1) ба ду қисм - устувор (дар нимҳамвории чап ҷойгир аст) ва ноустувор (дар нимҳамвории рост ҷойгир мебошад) ҷудо шавад, он гоҳ дар атрофи нуқтаи $(0, 0)$ проекторҳои ғайрихаттӣ мавҷуд мебошанд, ки фазои ҳолати системаи (1) - ро ба зерфазоҳои инвариантии устувор ва ноустувор ҷудо мекунанд.

Акнун проекторҳои ғайрихаттиро месозем.

Бигзор, спектри матритсаҳои қисми хаттии системаи (3) ба ду қисм - спектри устувор (зерфазои x устувор) ва спектри ноустувор B (зерфазои y ноустувор) ҷудо карда шавад [6-7]:

$$\sigma(A) \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < -\alpha\}$$

ва

$$\sigma(B) \subset \{\mu : \operatorname{Re} \mu > \beta\},$$

ки дар ин ҷо $\alpha > 0$ ва $\beta > 0$ мебошанд. Дар ин ҳолат проекторҳои хаттиро чунин муайян мекунем:

$$P(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ва } Q(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},$$

ки шартҳои зеринро қонеъ мекунанд:

$$QP = PQ = 0, P^2 = PP = P, Q^2 = QQ = Q. \quad (***)$$

Азбаски қисми ғайрихаттии тарафи рости системаи (1) ҳамзарбҳои εF_j ва εE_j ($j=1, 2$) - ро дарбар мегирад, он гоҳ зерфазоҳои хаттӣ мувофиқ инварианти намебошанд. Аз ин лиҳоз проекторҳои ғайрихаттиро барои системаи (1) дар шакли зерин ҷустуҷӯ мекунем [1-8]:

$$P_\varepsilon(z) = Pz + \varepsilon \Phi(z), \Phi : R^{m+n} \rightarrow R^{m+n}$$

ва

$$Q_\varepsilon(z) = Qz + \varepsilon \Psi(z),$$

ки дар ин ҷо $\Phi(z)$ ва $\Psi(z)$ - функсияҳои номаълум, $z = (x, y) \in R^{m+n}$ ва P, Q - проекторҳои хаттӣ буда, шартҳои баробарии (***) - ро қонеъ мекунанд. Барои ёфтани функсияи $\Phi(z)$ амалиётҳои зеринро иҷро мекунем:

а) мувофиқи шарт $P_\varepsilon^2 = P_\varepsilon$ ё $P_\varepsilon(P_\varepsilon(z)) = P_\varepsilon(z)$ ҳосил мекунем:

$$P_\varepsilon(P_\varepsilon(z)) = P_\varepsilon(Pz + \varepsilon\Phi(z)). \quad (7)$$

Бори дигар, мувофиқи таърифи проектори хаттӣ, ҳосил мекунем:

$$P_\varepsilon(u) = Pu + \varepsilon\Phi(u). \quad (8)$$

Тавассути гузориши $u = Pz + \varepsilon\Phi(z)$ ва ба назардошти баробарии (7), баробарии (8) намуди зеринро мегирад:

$$P_\varepsilon(P_\varepsilon(z)) = P(Pz + \varepsilon\Phi(z)) + \varepsilon\Phi(Pz + \varepsilon\Phi(z));$$

б) азбаски $P^2 = PP = P$ мебошад, пас ҳосил мекунем:

$$P(Pz + \varepsilon\Phi(z)) = PPz + \varepsilon P\Phi(z) = Pz + \varepsilon P\Phi(z);$$

в) азбаски $\Phi(z)$ - функсияи дар нуқтаи Pz дифференсиронидашаванда мебошад, мувофиқи формулаи Тейлор ҳосил мекунем [5-8]:

$$\Phi(Pz + \varepsilon\Phi(z)) = \Phi(Pz) + \varepsilon D\Phi(Pz)\Phi(z) + O(\varepsilon\Phi(z))^2$$

ё

$$\Phi(Pz + \varepsilon\Phi(z)) = \Phi(Pz) + D\Phi(Pz)(\varepsilon\Phi(z)) + O(\varepsilon)^2. \quad (9)$$

Азбаски ҳосилаи $D\Phi(Pz)$ - оператори хаттӣ мебошад, пас онро ба намуди зерин ифода мекунем:

$$D\Phi(Pz)(\varepsilon\Phi(z)) = \varepsilon D\Phi(Pz)\Phi(z).$$

Ҳар ду тарафи баробари (9) - ро ба ε зарб мекунем:

$$\varepsilon\Phi(Pz + \varepsilon\Phi(z)) = \varepsilon\Phi(Pz) + D\Phi(Pz)(\varepsilon^2\Phi(z)) + O(\varepsilon)^3; \quad (10)$$

г) ҳамин тариқ, дар баробарии (10) коэффитсиентҳои назди ε - ро бо ҳам баробар намуда, функсияи номаълуми $\Phi(z)$ - ро меёбем:

$$\Phi(z) = P\Phi(z) + \Phi(Pz). \quad (11)$$

Ба ҳамин монанд, барои муайян намудани функсияи

$$Q_\varepsilon(z) = Qz + \varepsilon\psi(z) \quad (12)$$

ва ба назардошти шарт $Q_\varepsilon^2 = Q_\varepsilon$ ҳосил мекунем:

$$\psi(z) = Q\psi(z) + \psi(Qz).$$

Аз ҳалли тақрибии (7) меёбем:

$$z(t) = z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + O(\varepsilon^2),$$

ки дар ин ҷо

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, z_0(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix}$$

аст. Бо назардошти баробарии (7) ва шарт (11), проектори $P_\varepsilon(z)$ - ро ҳосил мекунем [1-8-9]:

$$P_\varepsilon(z) = P_\varepsilon(x, y) = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} F_1(t, x, y) + E_1(t, x, y) \\ F_2(t, x, y) + E_2(t, x, y) \end{pmatrix} + O(\varepsilon)^2. \quad (13)$$

Айнан ҳамин тавр, барои проектори $Q_\varepsilon(z)$ ҳосил мекунем:

$$Q_\varepsilon(z) = Q_\varepsilon(x, y) = (I - P) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} F_1(t, x, y) + E_1(t, x, y) \\ F_2(t, x, y) + E_2(t, x, y) \end{pmatrix} + O(\varepsilon)^2. \quad (14)$$

Мисол. Системаи муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттии

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + \varepsilon(x^2 + xy) + \varepsilon \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = -3y + \varepsilon(y^2 + xy) + \varepsilon \cos t \end{cases}$$

бо шартҳои аввалии $x(0) = x_0$ ва $y(0) = y_0$ дода шудааст. Системаро ҳал намуда, проекторҳои ғайрихаттии онро месозем.

Ҳал. Дар системаи мазкур параметри $\varepsilon = 0$ - ро қабул мекунем. Он гоҳ системаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x, \\ \frac{dy}{dt} = -3y, \end{cases}$$

аз ин ҷо меёбем:

$$\begin{cases} x(t) = Ce^{2t}, \\ y(t) = Ce^{-3t}. \end{cases}$$

Бо назардошти шартҳои аввала ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{2(t-t_0)}, \\ y(t) = y_0 e^{-3(t-t_0)}. \end{cases}$$

Бо истифода аз усули вариатсияи доимиҳои ихтиёрӣ, системаи мазкурро ба системаи муодилаҳои интегралӣ табдил медиҳем:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x_0 e^{2t} + \varepsilon \int_{t_0}^t e^{2(t-s)} (x(s)^2 + x(s)y(s) + \sin s) ds, \\ \frac{dy}{dt} = y_0 e^{-3t} + \varepsilon \int_{t_0}^t e^{-3(t-s)} (y(s)^2 + x(s)y(s) + \cos s) ds. \end{cases}$$

Бо ҷойгузориҳои ҳалли қисми хаттии система ба системаи интегралӣ, ҳалли тақрибии системаи ғайрихаттиро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x_0 e^{2t} + \varepsilon \int_{t_0}^t e^{2(t-s)} (x_0^2 e^{4s} + x_0 y_0 e^{-s} + \sin s) ds, \\ \frac{dy}{dt} = y_0 e^{-3t} + \varepsilon \int_{t_0}^t e^{-3(t-s)} (y_0^2 e^{-6s} + x_0 y_0 e^{-s} + \cos s) ds. \end{cases}$$

Акнун проекторҳои ғайрихаттиро дар шакли зерин ифода мекунем:

$$\dot{z} = Az + \varepsilon F(t, z),$$

ки дар ин ҷо

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy + \varepsilon \sin t \\ y^2 + xy + \varepsilon \cos t \end{pmatrix}.$$

Қиматҳои хоси матритсаи A - ро меёбем:

$$\text{Det}(F = \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

аз ин ҷо $\lambda_1 = 2 > 0$ ноустувор ва $\lambda_2 = -3 < 0$ устувор мебошанд. Дар ин ҳолат проекторҳои ғайрихатти аз ду қисм иборат мебошанд:

а) қисми ноустувор

$$(P_u z)(t) = e^{2(t-t_0)} \eta + \varepsilon \int_{t_0}^t e^{2(t-s)} (x(s)^2 + x(s)y(s) + \sin s) ds;$$

б) қисми устувор

$$(P_s z)(t) = -\varepsilon \int_t^{+\infty} e^{-3(t-s)} (y(s)^2 + x(s)y(s) + \cos s) ds.$$

Дар натиҷа, проекторҳои ғайрихаттии устувор ва ноустувор мутаносибан намуди зеринро мегиранд:

$$(Pz)(t) = \begin{pmatrix} e^{2(t-t_0)} \eta + \varepsilon \int_{t_0}^t e^{2(t-s)} (x(s)^2 + x(s)y(s) + \sin s) ds \\ -\varepsilon \int_t^{+\infty} e^{-3(t-s)} (y(s)^2 + x(s)y(s) + \cos s) ds \end{pmatrix}.$$

Қайд. Барои муайян кардани функсияҳои $\Phi(z)$ ва $\psi(z)$ онҳоро дар шакли қаторҳои зерин ҷустуҷӯ мекунем:

$$\Phi(z) = \Phi_2(z) + \Phi_3(z) + \Phi_7(z) + \dots$$

ва

$$\psi(z) = \psi_2(z) + \psi_3(z) + \psi_7(z) + \dots$$

Қаторҳои мазкурро ба баробариҳои (11) ва (12) ҷойгузорӣ намуда, коэффитсиентҳои назди аъзои дараҷаи дуюм, сеюм ва дараҷаҳои минбаъдaro муқоиса мекунем. Дар натиҷа, қимати функсияҳои Φ_2, ψ_2 , сипас Φ_3, ψ_3 ва ғайраро муайян месозем [8-10].

Муҳокима (Discussion)

Натиҷаҳои тадқиқот самаранокии усули пешниҳодшударо барои сохтани проекторҳои ғайрихаттӣ ва омӯзиши сохтори динамикии системаи муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ нишон медиҳанд. Асоси усул ба ҷудокунии спектрии қисми хаттии система ва ба ҳисоб гирифтани таъсири узви ғайрихаттӣ тавассути функсияҳои ислоҳ-кунанда асос меёбад. Натиҷаи асосии теоремаи пешниҳодшуда дар он ифода меёбад, ки ҳангоми ҷудошавии спектри қисми хаттии система ба қисмҳои устувор ва ноустувор ва иҷро шудани шarti Липшиц, дар атрофи нуқтаи мувозинат проекторҳои ғайрихаттӣ мавҷуд мебошанд. Ин проекторҳо фазои ҳолати системаро ба зерфазоҳои инвариантии устувор ва ноустувор ҷудо намуда, таъсири қисми ғайрихаттиро ба сохтори геометрии система инъикос мекунанд.

Мисоли мушаххаси баррасишуда татбиқи амалии натиҷаи назариявиро тасдиқ менамояд. Таҳлили қиматҳои хоси қисми хаттии система имконият медиҳад, ки самтҳои устувор ва ноустувор муайян карда шаванд. Бо илова намудани функсияҳои ислоҳкунандаи ғайрихаттӣ проекторҳои хаттӣ ба проекторҳои ғайрихаттӣ табдил дода мешаванд, ки сохтори воқеии фазои ҳолати системаи мазкурро дақиқтар тавсиф мекунанд.

Хулоса (Conclusions)

Дар мақола тарзи сохтани проекторҳои ғайрихаттӣ барои системаи муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттии тарафи росташон аналитикӣ бо истифодаи шартҳои аввала тадқиқ шудааст. Натиҷаҳои бадастомада метавонанд барои омӯзиши устуворӣ ва хусусиятҳои динамикии системаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо аргументҳои таъхирӣ, системаи муодилаҳои дифференсиалии вобаста аз параметри хурд, системаи муодилаҳои дифференсиалии идорашаванда ва системаи муодилаҳои дифференсиалию фарқӣ тадбиқ карда шаванд.

Муқаррир: Шарипов Ё. – д.и.ф.-м., профессори кафедраи математикаи олии Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон.

Адабиёт

1. Валеев, К. Г. Бесконечные системы дифференциальных уравнений : учебник / К. Г. Валеев, О. А. Жаутыков. — Алма-Ата : Наука, 1974. — 416 с.

2. Садриддинов, М. М. Построение нелинейных проекторов для систем дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр / М. М. Садриддинов, У. Р. Рустамбекова // Политехнический вестник. Серия: Интеллект. Инновации. Инвестиции. — 2022. — № 3 (59). — С. 5–11. — ISBN 978-99985-900-4-2.
3. Aulbach, B. Integral manifolds for Carathéodory type differential equations in Banach spaces / B. Aulbach, T. Wanner // Six Lectures on Dynamical Systems. — Singapore : World Scientific, 1996. — P. 45–119.
4. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 535 с.
5. Ляпунов, А. М. Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — М. ; Л. : Гостехиздат, 1950. — 472 с.
6. Массера, Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х. Массера, Х. Х. Шеффер. — М. : Мир, 1970. — 476 с.
7. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. — М. : Наука, 1982. — 321 с.
8. Khatskevich, V. Differentiable Operators and Nonlinear Equations / V. Khatskevich, D. Shoikhet. — Basel : Birkhäuser, 1994. — 284 p.
9. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — М. : Мир, 1970. — 720 с.
10. Лыкова, О. Б. О существовании и поведении интегральных многообразий для систем нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр : автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / О. Б. Лыкова. — Киев : Институт математики АН УССР, 1957.

Reference

1. Valeev, K. G. Infinite Systems of Differential Equations : Textbook / K. G. Valeev, O. A. Zhautykov. — Alma-Ata : Nauka, 1974. — 416 p.
2. Sadriddinov, M. M. Construction of Nonlinear Projectors for Systems of Differential Equations Containing a Small Parameter / M. M. Sadriddinov, U. R. Rustambekova // Polytechnic Bulletin. Series: Intelligence. Innovations. Investments. — 2022. — No. 3 (59). — P. 5–11. — ISBN 978-99985-900-4-2.
3. Aulbach, B. Integral Manifolds for Carathéodory Type Differential Equations in Banach Spaces / B. Aulbach, T. Wanner // Six Lectures on Dynamical Systems. — Singapore : World Scientific, 1996. — P. 45–119.
4. Daletskii, Yu. L. Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space / Yu. L. Daletskii, M. G. Krein. — Moscow : Nauka, 1970. — 535 p.
5. Lyapunov, A. M. The General Problem of the Stability of Motion / A. M. Lyapunov. — Moscow ; Leningrad : Gostekhizdat, 1950. — 472 p.
6. Massera, J. L. Linear Differential Equations and Functional Spaces / J. L. Massera, J. J. Schäffer. — Moscow : Mir, 1970. — 476 p.
7. Pontryagin, L. S. Ordinary Differential Equations / L. S. Pontryagin. — Moscow : Nauka, 1982. — 321 p.
8. Khatskevich, V. Differentiable Operators and Nonlinear Equations / V. Khatskevich, D. Shoikhet. — Basel : Birkhäuser, 1994. — 284 p.
9. Hartman, P. Ordinary Differential Equations / P. Hartman. — Moscow : Mir, 1970. — 720 p.
10. Lykova, O. B. On the Existence and Behavior of Integral Manifolds for Systems of Nonlinear Differential Equations Containing a Small Parameter : Abstract of the Candidate of Physical and Mathematical Sciences Dissertation / O. B. Lykova. — Kyiv : Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1957.

Маълумот оид ба муаллиф:

Садриддинов Махмади Махмудович, дотсенти кафедраи математикаи олии Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0344-8524>. E-mail: mahmadi72@gmail.ru

Сведения об авторе:

Садриддинов Махмади Махмудович, доцент кафедры высшей математики Таджикского технического университета имени академика М.С. Осими. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0344-8524>. E-mail: mahmadi72@gmail.ru

Information about the author:

Sadriddinov Makhmadi Makhmudovich, associate professor of the department of higher mathematics of the Tajik technical University named after academician M.S. Osimi. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0344-8524>. E-mail: mahmadi72@gmail.ru