МАТЕМАТИКА - MATHEMATICS

УДК 517.9 DOI: 10.65599/III8560

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ОДНОГО НУЛЕВОГО КОРНЯ

С.З. Курбаншоев[1], У.Р. Рустамбекова[2]

[1]Российско – Таджикский (Славянский) университет

[2] Таджикский технический университет имени академика М.С. Осими

В статье разрабатывается разложение линейного дифференциального уравнения на операторные множители, которые применяются для отщепления одного частного решения асимптотически, поведение решений которого определяет устойчивость решений исходного дифференциального уравнения.

Ключевые слова: *устойчивость решений, оператор, дифференциального уравнения, функция Грина.*

ТАДҚИҚИ УСТУВОРИИ ҲАЛЛИ МУОДИЛАИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ХАТТИИ КВАЗИСТАТСИОНАРӢ ДАР ҲОЛАТИ КРИТИКИИ ЯК РЕШАИ НУЛӢ

С.З. Курбоншоев, У.Р. Рустамбекова

Дар мақола усули ҷудокунии муодилаи дифференсиалии хаттӣ ба бисераъзогиҳои операторӣ тадқиқ карда шудааст, ки он барои ҷудо кардани як ҳалли мушаххаси асимптотикӣ истифода мешавад. Усули ҳалли онҳо устувории ҳалли муодилаи дифференсиалии аслиро муайян мекунад.

Калидвожаҳо: *устувории ҳал, оператор, муодилаи дифференсиалӣ, функсияи Грин.*

INVESTIGATION OF THE STABILITY OF SOLUTIONS OF A LINEAR QUASI-STATIONARY DIFFERENTIAL EQUATION IN THE CRITICAL CASE OF A SINGLE ZERO ROOT

S.Z. Kurbanshoev, U.R. Rustambekova

The article examines a method for decomposing a linear differential equation into operator factors, which uses an asymptotic method to split off one particular solution, the behavior of which determines the stability of the solutions of the original differential equations.

Keywords: *stability of solutions, operator, differential equation, Green's function.*

Введение

Данное исследование проведено для устойчивости решений линейного квазистационарного дифференциального уравнения в критическом случае одного нулевого корня, которые впервые были разработаны в работах советских исследователей: А. Пуанкаре, Ю.А.Митропольского, К.Г. Валеева В.А. Плиса, Н.Г.Четаева и др., а также в работах зарубежных математиков: Диллиберто, А.Халаная, Н.Чейфи, В.Кайнера и др.

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение:

$$U_0(d)y + \mu U_1(t,d)y = 0, \tag{1}$$

где $U_0(d)$- дифференциальный оператор $n-$ го порядка.

$$U_0(d) = \sum_{k=1}^{n} a_k d^k, \ d = \frac{d}{dt}, \ a_k \neq 0,$$

$\mu-$ малый параметр, $U_1(t,d)$- нестационарный возмущающий оператор $U_1(t,d) = \sum_{k=0}^{n} b_k(t) d^k$,

$b_k(t)-$кусочно-непрерывные, ограниченные при $t \geq 0$ функции.

При $\mu = 0$ приходим к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0. \qquad (2)$$

Предположим, что характеристическое уравнение $U_0(p)=0$ имеет один нулевой корень, а остальные корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части.
При $\mu \neq 0$ возможна устойчивость или неустойчивость нулевого решения уравнения (1), [2]. Ищем частные решения уравнения (1), порождаемые нулевым корнем характеристического уравнения $U_0(p)=0$.

Для этого разложим дифференциальный оператор в уравнении (1) на операторные множители:

$$U_0(p) + \mu U_1(t,d) = U_2(t,d,\mu)(d - \mu\beta(t,\mu)). \qquad (3)$$

При этом дифференциальное уравнение (1) представляется в виде:

$$U_2(t,d,\mu)(d - \mu\beta(t,\mu)) = 0.$$

Обозначая $z = (d - \mu\beta(t,\mu))y,$ получим дифференциальное уравнение $(n-1)-$ го порядка

$$U_2(t,d,\mu)z = 0, \qquad (4)$$

где $U_2(t,d,0) = \sum_{k=1}^{n} a_k d^{k-1}.$

Поскольку все корни характеристического уравнения (4) имеют отрицательные вещественные части, то при малых значениях $|\mu| > 0$ все его решения экспоненциально [3] стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

Из уравнения

$$y' = \mu\beta(t,\mu)y = z$$

следует, что любое частное решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = \exp\left\{\mu \int_0^t \beta(t,\mu)dt\right\} + y_0(t,\mu),$$

где $y_0(t,\mu) \to 0$ при $\mu \to +\infty$. Следовательно, устойчивость всех решений уравнения (1) при достаточно малых значениях $|\mu| > 0$ будет определяться асимптотическим поведением при $t \to +\infty$ интеграла

$$I(t,\mu) = \int_0^t \beta(\tau,\mu)d\tau.$$

Если $I(t,\mu) \to +\infty$, то нулевое решение уравнения (1) неустойчиво, если $I(t,\mu) \le c = const$, то нулевое решение уравнения (1) устойчиво, если $I(t,\mu) \to -\infty$, то нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво. [4].

Построим функции $\beta(t,\mu)$ и рассмотрим некоторые её свойства.

Первый способ отыскания функции $\beta(t,\mu)$ заключается в непосредственном разложении дифференциального оператора на множители (3) и выделении линейного множителя. Другой способ заключается в установлении условий, при которых любое решение линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = \mu\beta(t,\mu)y \tag{5}$$

тождественно удовлетворяло уравнению (1). Дифференцируя уравнение (5) по t, получаем:

$$y' = \mu\beta y,$$
$$y'' = \mu\beta' y + \mu\beta y',$$
$$y''' = \mu\beta'' y + 2\mu\beta' y' + \mu\beta y'',$$
$$y^{IV} = \mu\beta''' y + 3\mu\beta'' y' + 3\mu\beta' y' + \mu\beta y''',\dots .$$

Исключая последовательно производные y', получим известные равенства:

$$y' = \mu\beta y,$$
$$y'' = \left(\mu\beta' + \mu^2\beta^2\right)y,$$
$$y''' = \left(\mu\beta'' + 3\mu^2\beta\beta' + \mu^3\beta^3\right)y,$$
$$y^{IV} = \left(\mu\beta''' + 4\mu^2\beta\beta'' + 3\mu^2\beta\beta' + 6\mu^3\beta^2\beta' + \mu^4\beta'\right)y,\dots .$$

Подставляя выражения для производных $y^{(k)}$ $(k = 1,2,\dots,n)$ через y в уравнение (1), приходим к дифференциальному уравнению для функции $\beta(t,\mu)$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\beta^{(k-1)} + b_0(t) + \mu S\left(t,\beta,\beta',\dots,\beta^{(n-1)},\mu\right) = 0, \tag{6}$$

где S —известная функция.

При $\mu = 0$ дифференциальное уравнение (6) имеет асимптотически устойчивое решение при $t \to +\infty$. При достаточно малых значениях $|\mu| > 0$ решение уравнения (6) $\beta = \beta(t,\mu)$ будет также асимптотически устойчивым при $t \to +\infty$. Это решение можно найти в виде разложения по степеням малого параметра μ в виде ряда [5]

$$\beta(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k\beta_k(t) = 0,$$

который заведомо сходится при достаточно малых значениях $|\mu| > 0$. Это решение можно также найти методом последовательных приближений [6, 9] из интегрального уравнения вида:

$$\beta(t,\mu) = -\int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)\left(b(\tau) + \mu S\left(\tau,\beta(\tau),\beta'(\tau),\dots,\beta^{(n-1)}(\tau),\mu\right)\right)dt. \tag{7}$$

где $G(t-\tau)$ функция Грина [7] для уравнения [8]

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\beta^{(k-1)} = f(t),$$

т.е.

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k p^{(k-1)}\right)^{-1} e^{pt}dp .$$

Дифференциальное уравнение (6) называем уравнением расщепления. Из формулы (7) следуют теоремы.

Теорема 1. Если коэффициенты $b_k(t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ являются периодическими функциями от t с общим периодом T, то ограниченное на всей оси t решение уравнения (6) $\beta=\beta(t,\mu)$ уравнения расщепления будет периодической функцией от t с периодом T при достаточно малых значениях $|\mu|>0$.

Теорема 2. Если коэффициенты $b_k(t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ в уравнении (1) являются почти периодическими функциями с некоторым частотным базисом, то ограниченное на всей оси решение $\beta=\beta(t,\mu)$ уравнения расщепления (6) является почти периодической функцией с тем же частотным базисом при достаточно малых значениях $|\mu|>0$.

Теорема 3. Если коэффициенты $b_k(t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ в уравнении (1) являются ограниченными на всей оси функции из класса C_s $(s>0)$, то ограниченное на всей оси решение $\beta=\beta(t,\mu)$ уравнение расщепления (6) будет ограниченным на всей оси функцией из класса C_s при достаточно малых значениях $|\mu|>0$.

Здесь C_s –обозначает класс непрерывных функций, имеющий непрерывные производные до порядка S включительно.

Пример. Исследуем условие устойчивости решений линейного дифференциального уравнения

$$y''' + y'' + y' + \mu\left(a\sin t\cdot y'' + b\cos t\cdot y' + \sin t\cdot y\right)=0 \qquad (8)$$

Ищем его решение в виде:

$$y = C\exp\left\{\mu\int_0^t \beta(\tau,\mu)d\tau\right\}.$$

Дифференцируя данное равенство, получим:

$$y' = \mu\beta y,\ y'' = \left(\mu\beta' + \mu^2\beta^2\right)y,\ \ y''' = \left(\mu\beta'' + 3\mu^2\beta\beta' + \mu^3\beta^3\right)y$$

используя которые находим уравнение расщепления:

$$\beta'' + \beta' + \beta + c\sin t + \mu\left(3\beta\beta' + \beta^2 + b\beta\cos t + \beta'\sin t\right) + \mu^2\left(\beta^3 + \beta^2 a\sin t\right) = 0.$$

Решение данного уравнения ищем в виде разложения по степеням параметра μ

$$\beta(t,\mu)=\beta_0(t)+\mu_1\beta_1(t)+\mu^2\beta_2(t)+\ldots.$$

Для функций $b_k(t)$ $(k=0,1,\ldots,n)$ находим уравнение

$$\beta_0'' + \beta_0' + \beta_0 + c\sin t = 0,$$

$$\beta_1'' + \beta_1' + \beta_1 + 3\beta_0\beta_0' + \beta_0^2 + b\beta_0\cos t\cdot a\beta_0'\sin t = 0.$$

Из первого уравнения находим $\beta_0 = \cos t$;

Из второго уравнения находим

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\left(ac - bc - c^2\right) + C_1\cos 2t + C_2\sin 2t,\ C_1, C_2 = const.$$

Следовательно, при достаточно малых значениях $|\mu|>0$ нулевое решение уравнения (8) будет асимптотически устойчивым при $c(a-b-c)<0$ и неустойчивым при $c(a-b-c)>0$.

Рецензент: Курбанов И. – д.ф.-м.н., профессор, член корр. НАНТ.

Литература

1. Лаврентьев М.Ф., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.:Физматгиз, 1958, 678 с.
2. Валеев К.Г. Динамическая стабилизация неустойчивых систем-Изв.Ан СССР, сер. Механика твёрдого тело, 1971, №4, с.13-21.
3. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве -М.:Наука, 1970, 534 с.
4. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.-М.: Физматгиз, 1959, 212 с.
5. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. в 6-ти т.-м: Л. : Изд-во Ан СССР, 1956, 472 с.
6. Валеев К.Г., Жаутыков О.А., Бесконечные системы дифференциальных уравнений -Алма-Ата: Наука, 1974, 416 с.
7. Валеев К.Г., Финин Г.С. Построение функций Ляпунова -Киев: Наук. думка, 1981, 412 с.
8. Курбоншоев, С. З. Сохтани функсияи Ляпунов барои системаи муодилаҳои фарқии тарафи росташон голоморфӣ / С. З. Курбоншоев, У. Р. Рустамбекова // Паёми политехникӣ. Бахши: Интеллект, Инноватсия, инвеститсия. – 2025. – No. 2(70). – P. 10-14. – EDN FLNVSC.
9. Рахимов, А. А. Методика использование математического пакета MAPLE 17 при изучении темы "Производная и ее применение" в курсе высшей математики для студентов технического вуза / А. А. Рахимов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2020. – № 11. – С. 308-313. – EDN DEDOES.

МАЪЛУМОТ ДАР БОРАИ МУАЛЛИФОН - СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ – INFORMATION ABOUT AUTHORS

TJ	RU	EN
Қурбоншоев Сафарали Завқибекович	Курбаншоев Сафарали Завкибекович	Kurbanshoev Safarali Zavkibekovich
д.и.ф.-м., профессор	д. ф.-м.н., профессор	Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Донишгоҳи (Славянии) Россияву Тоҷикистон	Российско – Таджикский (Славянский) университет	Russian – Tajik (Slavic) University
E-mail: kurbanshoev_s@mail.ru		
TJ	RU	EN
Рустамбекова Умеда Рустамбековна	Рустамбекова Умеда Рустамбековна	Rustambekova Umeda Rustambekovna
н.и.ф.-м., муаллими калон	к.ф.-м.н., старший преподаватель	Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior teacher
Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ	Таджикский технический университет имени академика М.С. Осими	Tajik technical university named after academician M.S. Osimi
E-mail: umeda.ru82@mail.ru		