

АМСИЛАСОЗИИ МАТЕМАТИКИИ РАВАНДИ ПАҲНШАВИИ МАВҶҶОИ ПОПУЛЯТСИОНӢ ДАР ҲОЛАТҶОИ ЭКСТРЕМАЛӢ

О.Қ. Қодиров

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ

Дар мақола раванди паҳншавии мавҷҳои популясионӣ дар ҳолатҳои экстремалӣ тадқиқ карда мешавад, ки ба воситаи муодилаи дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм бо коэффитсиентҳои доимӣ ифода карда мешаванд. Ҳангоми ёфтани ҳалҳо муодилаи амсилавӣ операторҳои дифференсиалӣ, системаи муодилаҳои зиёда муайян ва шартҳои ибтидоиро истифода мебарем. Ҳалҳо дар синфи экспоненсиалӣ ва дар намуди ошкор баён карда мешаванд. Пас барои раванди муоинашаванда дар забони барномасозии C++ барнома тартиб дода ҳисобкуниҳои ададӣ ва тасвири графикии онро мегузаронем.

Калидвожаҳо: муодилаи дифференсиалӣ, моделсозии математикӣ, мавҷҳои популясионӣ, шартҳои ибтидоӣ, системаи зиёдамуайян, муодилаи амсилавӣ, операторҳои дифференсиалӣ, муодилаи мувофиқоварӣ, ҳолатҳои экстремалӣ, барномасозӣ, нишондоди графикӣ.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОПУЛЯЦИОННЫХ ВОЛН В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ РЕЖИМАХ

О.К. Кодиров

В статье исследуется процесс распространения популяционных волн в экстремальных режимах, которые описываются дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами. При нахождении решения модельного уравнения используются дифференциальные операторы, система переопределенных уравнений и начальные условия. Решения представляются в экспоненциальном классе и в явном виде. Далее для рассматриваемого процесса, составляя программу на языке программирования C++, проведем численный расчет и графическую иллюстрацию.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, математическое моделирование, популяционные волны, начальные условия, переопределенная система, модельное уравнение, дифференциальные операторы, уравнение согласования, экстремальные режимы, программирование, графическая иллюстрация.

MATHEMATICAL MODELING OF THE PROPAGATION OF POPULATION WAVES IN EXTREME REGIMES

O.K. Kodirov

The article examines the process of propagation of population waves in extreme regimes, which are described by a second-order partial differential equation with constant coefficients. When finding a solution to a model equation, differential operators, a system of redefined equations, and initial conditions are used. The solutions are presented in an exponential class and explicitly. Next, for the process under consideration, creating a program in the C++ programming language, we will perform a numerical calculation and a graphic illustration.

Keywords: differential equation, mathematical modeling, population waves, initial conditions, redefined system, model equation, differential operators, matching equation, extreme modes, programming, graphic illustration.

Муқаддима

Мақсади гузаронидани тадқиқоти мазкур тартиб додани амсилаи математикӣ барои раванди паҳншавии мавҷҳои популясионӣ дар ҳолатҳои экстремалӣ мебошад. Барои ин муодилаи дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм муоина карда мешавад, ки раванди мазкурро ифода мекунад. Дар натиҷаи гузаронидани тадқиқот ҳалҳои ин муодилаи дифференсиалӣ дар синфи ҳалҳои экспоненсиалӣ дар намуди ошкор баён карда мешаванд. Инчунин, барои раванди муоинашаванда барнома дар забони C++ тартиб дода шуда, ҳисобкуниҳои ададӣ он ва нишондоди графикӣ гузаронида мешаванд [5,6].

Гузориши масъала

Раванди паҳншавии мавҷҳои популясиониро дар ҳолатҳои экстремалӣ муоина мекунем, ки бо муодилаи дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм бо коэффитсиентҳои доимӣ ифода меёбанд.

Муодилаи дифференсиалии намуди

$$(Lu)^n = \sum_{j=1}^m (L_j u)^n \quad (1)$$

-ро дида мебароем, ки дар ин ҷо m, n ($m, n > 1$)- ададҳои натуралӣ мебошанд. Бигзор, L ва L_j ($j = \overline{1, m}$)- ягон операторҳои дифференсиалӣ бошанд, ки намуди зеринро дошта бошанд:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k \frac{\partial}{\partial t} + r, L_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k_j \frac{\partial}{\partial x_j} + r_j \quad (j = \overline{1, m}) \quad (2)$$

Дар ин ҷо $t \geq t_0 \geq 0$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$, $k > 0$, $r > 0$, $k_j > 0$, и $r_j > 0$ ($j = \overline{1, m}$)- ададҳои ҳақиқӣ ва $u(t, x)$ - функцияи матлуб мебошанд [1]. Ин операторҳо ҳолати тағйирёбии раванди мавҷҳои популясиониро дар ҳолатҳои экстремалӣ дар лаҳзаи вақти t амалӣ мегардонанд. Пас вобаста ба операторҳои мазкур муодилаи дифференсиалии муоинашавандаи (1) намуди зеринро мегарад:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} + r u \right)^n = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + k_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + r_j u \right)^n. \quad (3)$$

Дар ҳолати умумӣ омӯзиши чунин равандҳои физикӣ ба муодилаи амсилавӣ бо хосиятҳои экстремалӣ меорад, ки аз тарафи профессор М. Юнусӣ барои тадқиқи равандҳои мавҷӣ [2] пешниҳод шудааст ва он намуди зеринро дорад:

$$Lu = \max_{\alpha \in A} \left\{ \sum_{j=1}^m \alpha_j (L_j u)^s \right\}^{\frac{1}{s}} \quad (4)$$

Дар муодилаи мазкур $A = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) : 0 < \alpha_j < 1, \sum_{j=1}^m \alpha_j^{\frac{n}{n-s}} = 1 \right\}$, $n > s > 0$ - ададҳои натуралӣ мебошанд.

Барои ёфтани ҳалли хусусии муодилаи дифференсиалии (3) шартҳои ибтидоии зеринро истифода мебарем:

$$u = (t_0; x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m}) = u_{01}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = (t_0; x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m}) = u_{02}. \quad (5)$$

Барои он ки ҳалли муодилаи мазкур дар синфи ҳаллҳои экспоненсиалӣ ёфта шавад, аз системаи ёрирасони зиёдамуайяни зерин истифода мебарем:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} + r u = C u, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + k_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + r_j u = C_j u, \quad (j = \overline{1, m}). \end{cases} \quad (6)$$

Дар системаи муодилаҳои (6) C ва C_j ($j = \overline{1, m}$) - ададҳои ҳақиқии дилхоҳ мебошанд, ки ҳалли муодилаи мувофиқоварии зерин мебошанд:

$$\sum_{j=1}^m C_j^n = C^n. \quad (7)$$

Ҳалли муодилаи зиёдамуайяни (7) – ро меёбем, ки ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии (3) дар синфи ҳалҳои экспоненсиалӣ мебошад. Ҳалли муодилаи мазкур аз се ҳолат иборат мебошад. Ҳар яке аз ин ҳолатҳоро дар алоҳидагӣ дида мебароем.

а) Ҳолати якум: Бигзор $k^2 + 4(C-r) > 0$, $k_j^2 + 4(C_j - r_j) > 0$, ($j = \overline{1, m}$) бошанд. Дар ин ҳолат ҳалли муодилаи дифференсиалии (3) намуди зеринро мегирад:

$$\begin{aligned} u = & \left[\frac{2u_{0,2} + (k + \sqrt{k^2 + 4(C-r)}) \cdot u_{0,1}}{2^{m+1} \sqrt{k^2 + 4(C-r)}} \times \right. \\ & \times \exp \left\{ \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4(C-r)}}{2} (t - t_0) \right\} - \\ & - \frac{2u_{0,2} + (k - \sqrt{k^2 + 4(C-r)}) \cdot u_{0,1}}{2^{m+1} \sqrt{k^2 + 4(C-r)}} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{-k - \sqrt{k^2 + 4(C-r)}}{2} (t - t_0) \right\} \Big] \times \\ & \times \prod_{j=1}^m \left[\exp \left\{ \frac{-k_j + \sqrt{k_j^2 + 4(C_j - r_j)}}{2} (x_j - x_{0,j}) \right\} + \right. \\ & \left. + \exp \left\{ \frac{-k_j - \sqrt{k_j^2 + 4(C_j - r_j)}}{2} (x_j - x_{0,j}) \right\} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

б) Ҳолати дуюм: Бигзор, $k^2 + 4(C-r) = 0$, $k_j^2 + 4(C_j - r_j) = 0$, ($j = \overline{1, m}$) бошанд. Дар ин ҳолат, ҳалли муодилаи дифференсиалии (3) намуди зеринро мегирад:

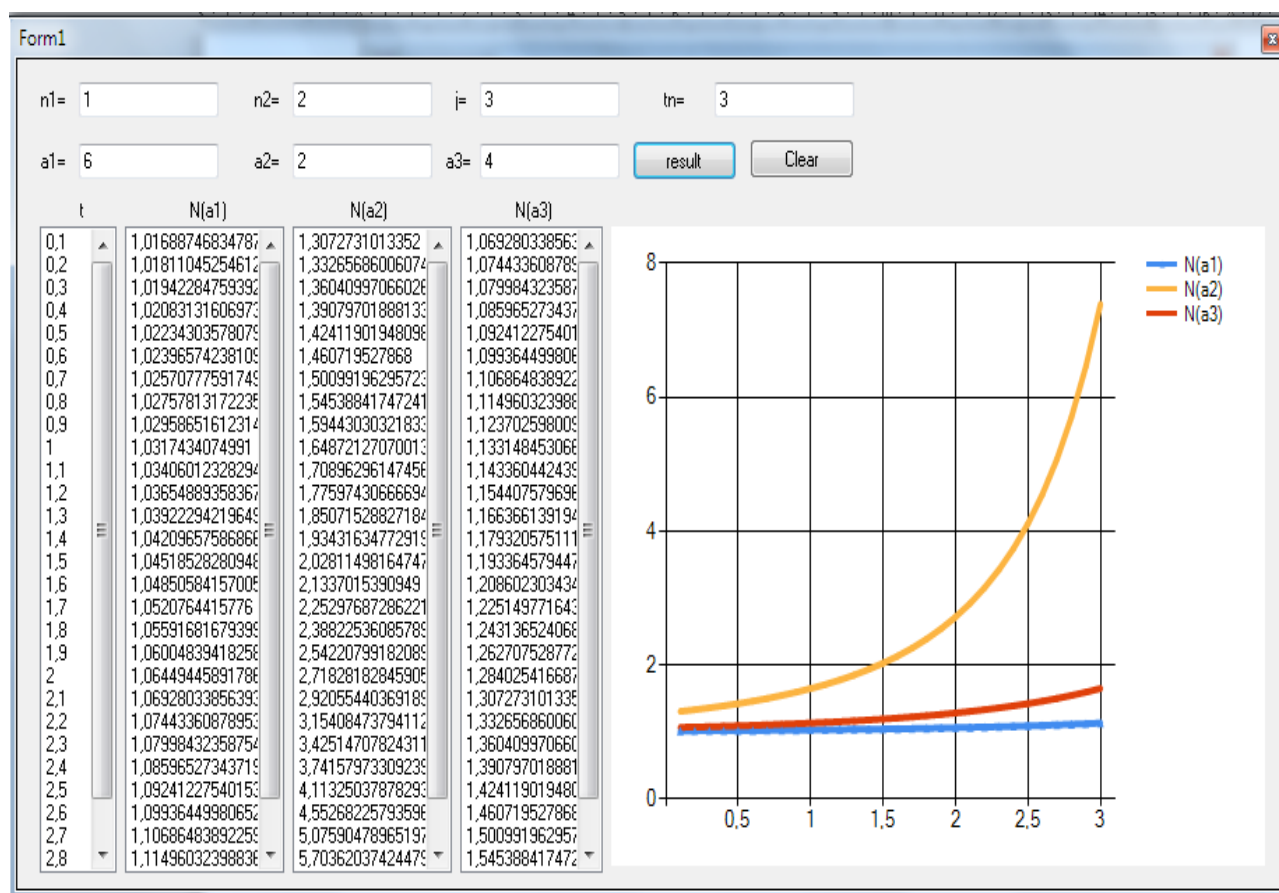
$$u = \left[u_{0,1} + \left(u_{0,2} + \frac{k}{2} u_{0,1} \right) \cdot (t - t_0) \right] \cdot \exp \left\{ -\frac{k}{2} (t - t_0) \right\} \times \\ \times \prod_{j=1}^m \left[1 + x_j - x_{0,j} \right] \cdot \exp \left\{ -\frac{k_j}{2} (x_j - x_{0,j}) \right\}. \quad (9)$$

в) Ҳолати сеюм: Бигзор, $k^2 + 4(C - r) < 0$, $k_j^2 + 4(C_j - r_j) < 0$, $(j = \overline{1, m})$ бошанд. Дар ин ҳолат бошад, ҳалли муодилаи дифференсиалии (3) намуди зеринро мегирад:

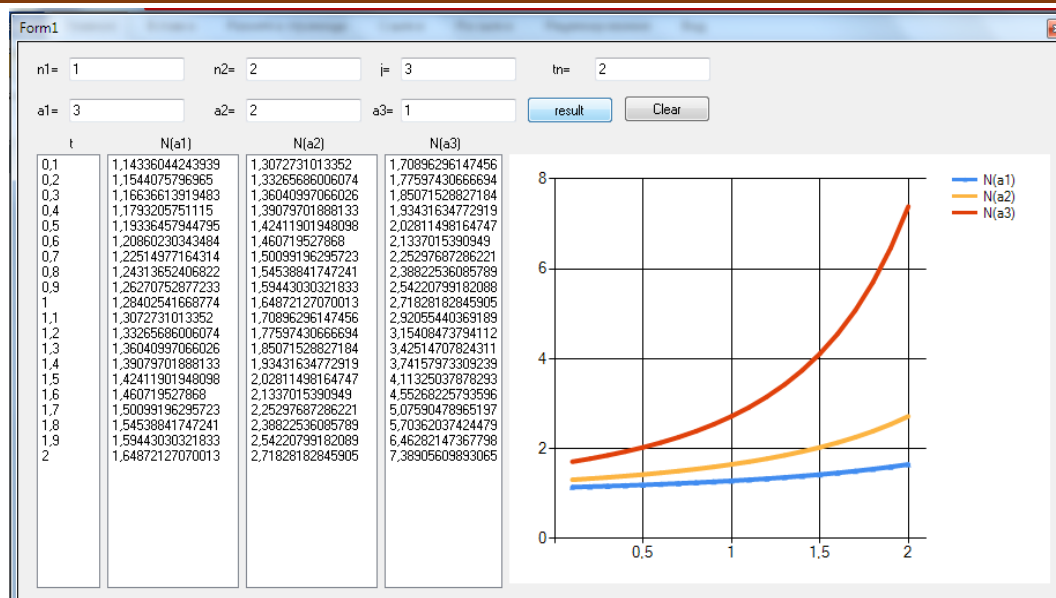
$$u = \exp \left\{ -\frac{k}{2} (t - t_0) \right\} \cdot \left[u_{0,1} \cos \left(\frac{\sqrt{k^2 + 4(C - r)}}{2} (t - t_0) \right) + \right. \\ \left. + \frac{2u_{0,2} + ku_{0,1}}{\sqrt{k^2 + 4(C - r)}} \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{k^2 + 4(C - r)}}{2} (t - t_0) \right) \right] \times \\ \times \prod_{j=1}^m \left[\exp \left\{ -\frac{k_j}{2} (x_j - x_{0,j}) \right\} \cdot \left\{ \cos \left(\frac{\sqrt{k_j^2 + 4(C_j - r_j)}}{2} (x_j - x_{0,j}) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin \left(\frac{\sqrt{k_j^2 + 4(C_j - r_j)}}{2} (x_j - x_{0,j}) \right) \right\} \right]. \quad (10)$$

Теорема. Бигзор, C ва C_j ($j = \overline{1, m}$) ҳалҳои муодилаи мувофиқоварии (7) бошанд. Пас ҳалҳои муодилаи дифференсиалии (3), ки шартҳои ибтидоии (5) - ро қаноат мекунад, вобаста ба системаи зиёдамуайяни (6) мувофиқан дар намудҳои (8), (9) ва (10) ифода меёбанд.

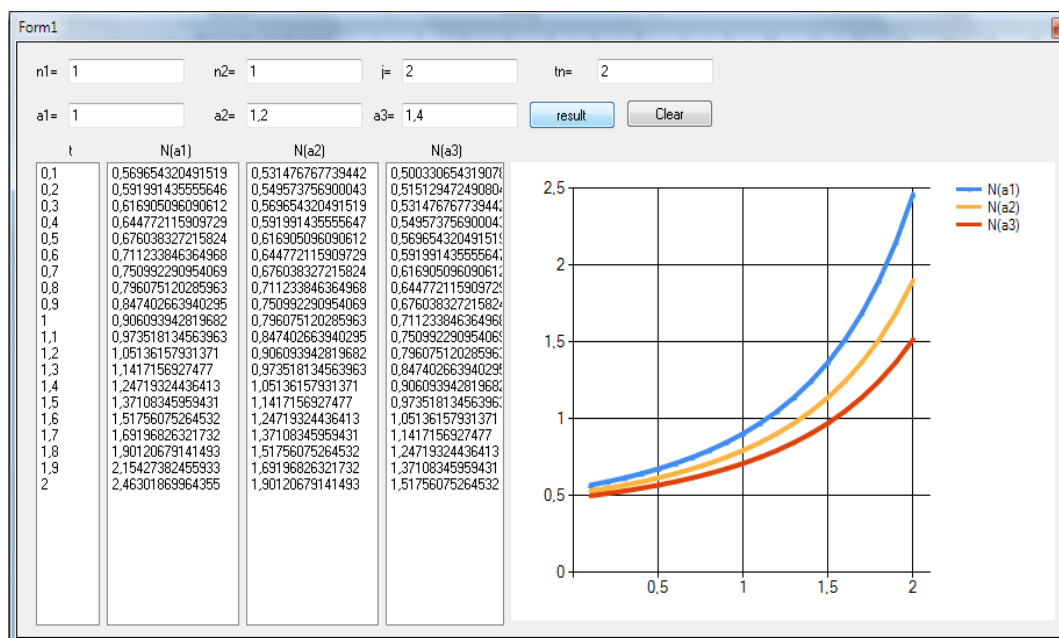
Акнун дар забони барномасозии C++ барои раванди мавҷии муоинашаванда, яъне барои раванди мавҷҳои популятсионӣ дар ҳолатҳои экстремали рақамикунонии натиҷаҳои бадастомадаро мегузаронем ва нишондоди графיקии онҳоро муайян мекунем.



Расми 1– Натиҷаи тадқиқоти якум бо нишондодҳои ададӣ ва графӣ



Расми 2 – Натиҷаи тадқиқоти дуюм бо нишондодҳои ададӣ ва графикӣ



Расми 3 – Натиҷаи тадқиқоти сеюм бо нишондодҳои ададӣ ва графикӣ

Хулоса

Дар илми математикаи муосир муодилаҳои дифференсиалӣ барои тадқиқи равандҳои физикии табиат нақши муҳимро мебозанд. Бинобар ин, кори мазкур ба тадқиқи раванди паҳншавии мавҷҳои популясионӣ бахшида шуд, ки ба воситаи муодилаи дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм ифода меёбанд. Дар натиҷаи гузаронидани тадқиқот ҳалли муодилаи дифференсиалии муоинашаванда ба тарзи аналитикӣ ҳосил карда шуд. Инчунин, барои баҳо додани тағйирёбии раванди паҳншавии мавҷҳои популясионӣ барнома тартиб дода шуда, нишондодҳои ададӣ ва графикӣ он пешниҳод карда шудааст.

Муқарриз: Самаров Ш.Ш. — н.и.ф.-м., дотсенти Донишгоҳи миллии тадқиқотӣ “Донишқадаи энергетикӣи Москва” дар ш. Душанбе.

Адабиёт

1. Юнуси М.К. Об одном классе модельных уравнений с экстремальным свойством. Вестник национального университета, 2004, серия математика, № 1, с.128-135
2. Юнуси М. Теорема о представлении сложных объектов описываемых дифференцированными уравнениями полиномами. Вестник ТНУ, 2013, (серия естественных наук) № 1(102), с.3-12.
3. Гадзозода М, Кодиров О.К. Об одном классе дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка, Вестник национального университета (серия естественных наук). №1 (49) Душанбе, 2009 г., стр. 49-53.

4. Гадозода М, Кодиров О.К. Представления решений одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Вестник технического университета №4. 2009 г., стр. 5-7.

5. Гадозода М., Кодиров О.К. Представление решений для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка, Вестник Таджикского национального Университета (серия естественных наук). №1/4. Душанбе, 2017 г., стр. 49-52.

6. Кодиров О.К., Туйчиев Л. Исследование волнового процесса физических явлений в экстремальных режимах. Материалы Международной научно - практической конференции «Перспектива развития науки и образования» (ТТУ им. М.С. Осими, Душанбе, 27-28 ноября 2019 г.). Душанбе, 2019, стр. 306-309.

7. Кодиров О.К., Гадозода М., Юниси М.К. Исследование процессов малых поперечных и продольных колебаний струны и тепловых волн с особенностями, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка в экстремальных режимах. Душанбе, Вестник национального университета (серия естественных наук). №2, 2020, с.110-124.

8. Кодиров О.К. Представление решений одного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами в частных производных третьего порядка. Вестник Бохтарского государственного университета им. Н. Хусрава. Научный журнал. Серия гуманитарных и экономических наук. – Бохтар. 2022г. стр. 45-49.

9. Кодиров О.К. Исследование одного дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка. Вестник технического университета №4(64) 2023г., стр. 4-6.

МАЪЛУМОТ ДАР БОРАИ МУАЛЛИФ – СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ – INFORMATION ABOUT AUTHOR

TJ	RU	EN
Кодиров Одина Қаҳҳорович	Кодиров Одина Каххорович	Qodirov Odina Qahhorovich
н.и.ф.-м., муаллими калон	к.ф.-м.н, старший преподаватель	Candidate of physical and mathematical sciences, Senior Lecturer
Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ	Таджикский технический университет имени академика М.С. Осими	Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi
E-mail: o.kodirov.1969@mail.ru		